Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Marta Pytlak (Rzeszów)

Stymulowanie myślenia algebraicznego w środowisku regularności

Streszczenie

O algebrze w polskiej szkole podstawowej mówi się niewiele. Nauczanie matematyki na tym poziomie edukacyjnym nastawione jest głównie na kształtowanie wiadomości i umiejętności arytmetycznych. Tymczasem w ostatnich latach wiele miejsca poświęcono na dyskusję o nauczaniu algebry w szkole podstawowej. Między innymi mówi się o tzw. wczesnej algebrze czyli o wprowadzaniu w myślenie algebraiczne (Mutschler, 2005). Bardzo trudno rozdzielić myślenie algebraiczne od myślenia arytmetycznego. Jedną z sugerowanych dróg rozwijania myślenia algebraicznego jest „nadbudowa" nad myśleniem arytmetycznym. Dokonuje się tego na drodze uogólniania rozważań arytmetycznych poprzez uzmiennianie stałych. Służyć temu mogą zadania polegające na odkryciu zależności geometryczno–arytmetycznych, które należy uogólnić, zapisać symbolicznie.

Odkrywanie, dostrzeganie regularności przez uczniów to problem ważny i obecny w światowych trendach nauczania matematyki. W wielu krajach w nauczaniu matematyki zwraca się uwagę na rytm i regularności. W literaturze można znaleźć opisy prowadzonych badań dotyczących odkrywania i uogólniania zauważonych reguł (Zazkis, Liljedahl, 2002, Littler, Benson, 2005) Poszukiwanie regularności jest niezwykle skuteczne przy rozwiązywaniu matematycznych problemów, jest strategią rozwiązywania zadań.

W swojej pracy przedstawiam częściowe wyniki badań przeprowadzonych w szkole podstawowej wśród uczniów klasy czwartej, dotyczące odkrywania regularności ukierunkowanych na tworzenie algebraicznych związków. Omawiam ogólne strategie zastosowane przez uczniów podczas pracy nad zadaniem oraz bardziej szczegółowo analizuję pracę jednej z par uczniów biorących udział w badaniu.

Zaprezentowany fragment badań pokazuje, jak bardzo różne są drogi myślowe dziecka. Widać również jak bardzo ważna jest w procesie rozwiązywania zadania werbalizacja własnych myśli oraz sprawdzenie swojego toku rozumowania – weryfikacja już uzyskanych wyników. Mówił o tym wyraźnie G. Polya – „rzut oka wstecz". Podczas sprawdzania poprawności wykonania zadania uczennice odkryły nowe podejście do zadania. Zatem poprzez weryfikację słowną były w stanie zmienić swoje spojrzenie na zadanie. Werbalizacja spowodowała zmianę ich działania. Dzięki temu potrafiły uogólnić zauważoną regułę.

Dziewczynki prezentowały różny poziom wiedzy. Bez względu jednak na to obie potrafiły odnaleźć się w „algebraicznej rzeczywistości". Obie pokazały, że potrafią

myśleć algebraicznie, mimo że w różnym stopniu opanowały arytmetykę. Jednocześnie arytmetyka, zbytnie skupienie się na obliczeniach i poprawnym stosowaniu reguł arytmetycznych, przeszkadzały w rozwiązaniu, zaciemniały bądź przesłaniały istotę zadania. Może zatem warto rozwijać myślenie algebraiczne niezależnie od arytmetycznego?

Wprowadzenie

Dostrzeganie regularności to zagadnienie podstawowe dla tworzenia matematyki. Rytm i regularność znaleźć można praktycznie w każdej dziedzinie matematyki: analizie, algebrze, arytmetyce, geometrii czy statystyce. Różne aksjomatycznie ujmowane prawa działań mają swoje korzenie w funkcjonowaniu regularności. Również wiele definicji pojęć matematycznych czy też twierdzenia to zazwyczaj wypowiedzi matematyczne, które zainspirowane zostały regularnościami. Na rytmie i regularnościach opierają się między innymi definicje ciągów liczbowych. Kolejnym przykładem wykorzystania regularności w matematyce jest zasada indukcji matematycznej. Również pojęcie nieskończoności może funkcjonować jako „nieskończoność potencjalna" i często jest postrzegane jako możliwość powtarzania pewnej zasady czy stosowania określonego kryterium dowolną ilość razy (Swoboda, 2006, s. 44).

Poszukiwanie regularności jest niezwykle skuteczne przy rozwiązywaniu matematycznych problemów, jest strategią rozwiązywania zadań. Jak pisze E. Swoboda (2006, s. 51-52): „(...) dostrzeganie regularności jest umiejętnością ze wszech miar pożądaną. Zajęcia, w których dziecko ma za zadanie dostrzec regularność, działać zgodnie z regułą – są zajęciami stymulującymi jego rozwój umysłowy. Są też podstawą myślenia matematycznego na każdym poziomie matematycznych kompetencji." Zatem regularności powinny być szeroko obecne w edukacji matematycznej dzieci. Jak zauważa prof. H. Steinbring (2005) „dzieci powinny się uczyć – i są w stanie to robić na swój własny sposób – dostrzegania ogólności (nowej wiedzy) w szczegółach".

Odkrywanie, dostrzeganie regularności przez uczniów to problem ważny i obecny w światowych trendach nauczania matematyki. Coraz więcej miejsca w literaturze poświęca się zagadnieniu nauczania matematyki poprzez regularności. Mówią o tym m.in. Wittman (2001), Hejný, Littler (2002), Zazkis, Liljedah (2002a, 2002b), Malara, Navarra (2003), Littler, Benson (2005a, 2005b), Mutschler (2005), Radford (2008). R. Skemp (1989) bardzo mocno rozwijał pogląd, że regularności matematyczne to jedna z podstawowych idei, które dzieci są w stanie rozpoznać i z którymi powinny zapoznawać się w szkole podstawowej. Główną wartością zadań, w których uczniowie mają dostrzec występujące związki, reguły jest to, że prowadzą one do stawiania hipotez, przypuszczeń, wyczulają na związki między pojęciami i uczą, jak z tych związków korzystać.

W ostatnich latach wiele miejsca poświęcono na dyskusję o nauczaniu algebry w szkole podstawowej (MacGregor, Stacey, 1999; Stacey, K., Chick, H., Kendal, M. 2004; Kaput, J., Carraher, D., Blanton, M. 2008; Blanton, M., Kaput, J. 2003). Między innymi mówi się o tzw. wczesnej algebrze czyli o wprowadzaniu w myślenie algebraiczne (Mutschler, 2005). Jedną z sugerowanych dróg rozwijania myślenia algebraicznego jest „nadbudowa" nad myśleniem arytmetycznym (Littler, Hejny, 2002). Dokonuje się tego na drodze uogólniania rozważań arytmetycznych poprzez uzmiennianie stałych. Służyć temu mogą zadania polegające na odkryciu zależności geometryczno-arytmetycznych, które należy uogólnić, zapisać symbolicznie. W takim podejściu zapis literowy (symboliczny) jest ostatnim etapem procesu uogólniania, a litera jest nasycona sensem określonym przez środowisko edukacyjne, w którym była tworzona. Ułatwia to późniejsze interpretowanie zapisów oraz manipulacje symbolami. Przejście do zapisu symbolicznego jest dla ucznia szkoły podstawowej dość trudne. Uczeń najpierw wypowiada uogólnioną zależność słownie, a następnie próbuje ją zapisać przy użyciu symboli.

Istota myślenia algebraicznego nie sprowadza się do posługiwania się symboliką algebraiczną. Użycie symboliki algebraicznej, zapisanie rozważań przy jej użyciu jest już zewnętrznym obrazem „myślenia algebraicznego". Z elementarnego punktu widzenia, algebraiczne myślenie w oczywisty sposób jest związane z zajmowaniem się pewną nieokreślonością (rozumianą jako pewna ogólność) w sposób analityczny. Ponadto, jak pisze Radford: „Istnieje pojęciowy obszar, gdzie uczniowie mogą rozpoczynać swoje myślenie algebraiczne, nawet jeśli jeszcze nie odwołują się (lub przynajmniej nie w dużym stopniu) do języka symbolicznego" (Radford, 2009).

Na kreatywność myślenia podczas rozwiązywania problemów matematycznych wpływ ma język naturalny (Consogno, 2005). Wypowiadając nasze myśli ubieramy je w słowa. Przechodzimy z mowy „wewnętrznej" (czyli mowy dla siebie") do mowy „zewnętrznej" (czyli uzewnętrznienia naszych myśli, zaprezentowania ich innym). Następuje transformacja językowa, polegająca na wypowiadaniu myśli własnymi słowami (Wygotski 1989). Pozwala to na dostrzeżenie nowych możliwości rozwiązania problemu, na zrozumieniu jego istoty. Język werbalny odgrywa bardzo ważną rolę podczas analizy rozwiązania danego problemu. Powoduje on zmianę w odbiorze omawianego tekstu, stymuluje tworzenie nowych powiązań w istniejącym zbiorze wiadomości.

W jaki sposób zatem język werbalny będzie wpływał na myślenie algebraiczne uczniów podczas rozwiązywania zadania dotyczącego uogólniania? Aby odpowiedzieć na to pytanie przeprowadziłam badania wśród uczniów szkoły podstawowej.

Cel badań

Zagadnieniem dostrzegania regularności i stosowania odkrytych zasad przez uczniów zajmuję się już od pewnego czasu. Prezentowane tu badania są częścią serii badań dotyczących dostrzegania regularności przez uczniów na różnych szczeblach nauczania. Inspiracją do podjęcia tej tematyki były dla mnie wyniki polskich uczniów w międzynarodowym teście PISA oraz jedno z zadań z PISA zwane „Jabłonki" (Białecki, Blumsztajn, Cyngot, 2003). Wyniki z wcześniejszych badań były prezentowane m.in. podczas XIX SDM we Wrocławiu oraz w artykule w czasopiśmie Dydaktyka Matematyki (Pytlak, 2006, 2008).

Celem opisanych w tym artykule badań było uzyskanie odpowiedzi na następujące pytania.

- Czy 9–10-letni uczniowie potrafią dostrzegać matematyczne regularności, a jeżeli tak, to jakie procesy myślowe zachodzą u nich podczas rozwiązywania zadań, w których mają odkryć i zastosować odkryte zasady?
- Czy potrafią współpracować podczas rozwiązywania zadania?
- W jakim stopniu wspólna praca ma wpływ na sposób rozwiązania zadania oraz odkrywanie regularności i stosowanie ich w zadaniu?

Metodologia

Przedstawione tutaj badania zostały przeprowadzone w lutym 2008 roku wśród uczniów czwartej klasy szkoły podstawowej (dzieci 9–10 letnie). Badanie obejmowało cykl czterech następujących po sobie spotkań, w trakcie których uczniowie rozwiązywali kolejne zadania. Wszystkie spotkania były nagrywane kamerą video. Po przeprowadzonym badaniu został sporządzony protokół z badania. Uczniowie pracowali w parach. Badacz rozmawiał z każdą grupą w trakcie rozwiązywania przez nią zadania.

W badaniu udział wzięło 12 uczniów. Uczniowie mieli do dyspozycji arkusze pracy, patyczki, długopisy oraz kalkulator. Przed przystąpieniem do pracy zostali poinformowani, że zadania mogą rozwiązywać w sposób dowolny, na otrzymanych arkuszach mogą zapisywać wszystko, co uznają za konieczne.

Narzędzie badawcze stanowiły cztery arkusze, po dwa zadania na każdym. Zadania były następujące: uczniowie układają zapałczany wzorek z figur – raz są to trójkąty, raz kwadraty o boku długości jednej zapałki. Pytanie brzmiało: ile zapałek potrzebujesz na ułożenie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 takich figur? Wyniki należało wpisać do odpowiedniej tabelki. W zadaniu drugim pytano o to, ile zapałek potrzeba na ułożenie takich 10, 25 i 161 figur.

Wzorki, jakie były przedmiotem kolejnych zadań, przedstawiały się następująco.

1. Oddzielne trójkąty tej samej wielkości, ułożone w jednym rzędzie.

2. Oddzielne kwadraty tej samej wielkości, ułożone w jednym rzędzie.
3. Kwadraty tej samej wielkości, ułożone w jednym rzędzie, połączone jednym bokiem.
4. Trójkąty tej samej wielkości, ułożone w jednym rzędzie, obrócone w stosunku do siebie o 180°, połączone jednym bokiem.

Dobór zadań i kolejność arkuszy nie była przypadkowa. Chodziło o sprawdzenie, czy uczniowie będą korzystali z wcześniejszych doświadczeń przy rozwiązywaniu nowych zadań, czy raz wypracowana strategia rozwiązania będzie miała zastosowanie przy następnym zadaniu.

Zadanie to oraz sposób jego prezentacji (cztery następujące po sobie sesje) były dla uczniów czymś nowym. Do tej pory na lekcjach matematyki nie rozwiązywali zadań polegających na dostrzeganiu występujących reguł i uogólnianiu zauważonych zależności. Było to dla nich nowe wyzwanie.

Materiał badawczy stanowią wypełnione przez uczniów arkusze z zadaniami oraz filmowy zapis ich pracy i stenogram z badań.

Ogólne omówienie wyników badań w tej grupie

Praca uczniów nad zadaniem wielokrotnie przebiegała podobnie. Dało to możliwość stworzenia ogólnego modelu pracy uczniów. Zewnętrzna forma pracy pokazała, że pierwsze dwa arkusze uczniowie rozwiązywali bardzo szybko. Nie potrzebowali przy tym układać wzorku złożonego z odpowiednich figur, od razu przystępowali do wypełniania tabelki, a następnie do udzielenia odpowiedzi na pytanie drugie. Potrafili bezbłędnie podać regułę (zazwyczaj było to sformułowanie słowne, uczniowie nie odwoływali się zazwyczaj do symboliki), według której buduje się dany wzorek. Niektórzy uczniowie układali tylko jedną figurę (jeden trójkąt w przypadku arkusza pierwszego i jeden kwadrat w przypadku arkusza drugiego). Było to raczej zaznaczenie, o jaki rodzaj figur chodzi w zadaniu, niż o wspomaganie się w jego rozwiązaniu. Trudności pojawiały się podczas pracy nad arkuszem trzecim. Jedna z nich dotyczyła sformułowania „połączonych w jednym rzędzie". Uczniowie pytali, jak poszczególne figury mają być ze sobą połączone – bokami czy wierzchołkami. Kolejna przeszkoda pojawiała się przy przejściu z tabelki do pytania drugiego. Uczniowie nie mieli na tyle patyczków, aby kontynuować układanie wzorku. Ponadto w tabelce podawali kolejne wartości, a w pytaniu drugim następował „przeskok". Dla uczniów początkowo problemem było wypełnienie powstałej luki. Aby udzielić odpowiedzi, zaczynali więc analizować dotychczasowe rozwiązanie zadania oraz sposób powstawania wzorku.

Analizując bardziej szczegółowo przebieg pracy całej badanej grupy można zbudować ogólny model rozwiązywania zadań tej serii. Strategie stosowane przez uczniów były następujące.

Arkusz pierwszy był wypełniany bardzo szybko. Odkrycie reguły następowało już na etapie wypełniania tabelki i przejawiało się w sposobie jej wypełnienia. Było to: dodaj trzy do poprzedniej wielkości (dotyczyła tabelki) albo pomnóż liczbę trójkątów przez 3. Wszystkie odpowiedzi i formułowane reguły były poprawne, uczniowie potrafili dokonać słownego uogólnienia, nie stosowali jednak zapisu symbolicznego.

Arkusz drugi – uczniowie zauważali analogię do zadania poprzedniego. Niektórzy z rozpędu stosowali regułę „pomnóż przez trzy". Rozwiązanie zadania trwało znacznie krócej, niż w przypadku arkusza drugiego.

Arkusz trzeci był dla uczniów wyzwaniem. Początkowo próbowali przenieść metodę rozwiązania z poprzednich arkuszy. Widząc, że jest nieskuteczna, szukali innego rozwiązania. Zaczynali analizować treść zadania. Następnie układali z zapałek fragment wzoru – dla dwóch, trzech kwadratów. Manipulacje pomagały im odkryć regułę: pierwszy kwadrat z czterech, każdy następny z trzech elementów, zatem aby podać liczbę potrzebnych zapałek należy do poprzedniej wartości dodać trzy. Przy rozwiązywaniu zadania drugiego pojawiały się dwa sposoby postępowania: kontynuacja „doliczania trójek" aż do 10 kwadratów lub szukanie cząstkowych wyników w tabelce, korzystanie z już uzyskanych danych. Uczniowie początkowo byli przekonani o poprawności tej ostatniej metody, dopiero rozmowa z nauczycielem oraz weryfikacja stosowanej metody dla danych z tabelki (np. czy tak będzie dla 7) powodowała zmianę sposobu myślenia i odkrycie odpowiedniej zależności.

Arkusz czwarty również stanowił dla uczniów wyzwanie. Korzystali tutaj jednak z doświadczeń nabytych podczas pracy nad arkuszem trzecim, dlatego też praca nad zadaniem przebiegała sprawnie.

Opisany powyżej model jest ogólny i nie daje podstaw do odpowiedzi na sformułowane cele badawcze. Dlatego główny wysiłek badawczy skierowałam na szczegółową analizę pracy każdej pary dzieci. Przykład takiej analizy przedstawiam w dalszej części tego opracowania. Dotyczy on procesu rozwiązania zadań z arkusza trzeciego, jakie zaprezentowały dwie dziewczynki, Sybilla i Nikola.

Praca Sybilli i Nikoli

Nikola to dziewczynka bardzo dobrze radząca sobie ze szkolną matematyką, dobrze operująca posiadaną wiedzą. Sybilla jest uczennicą znacznie słabszą, która potrzebuje do rozwiązania zadania reprezentacji wizualnej.

Podczas rozwiązywania zadań z dwóch poprzednich arkuszy dziewczynki nie pracowały razem. Sybilla rozwiązywała zadania razem z inną swoją koleżanką, Pauliną. Wtedy, zanim zaczęły rozwiązywać zadanie z arkusza pierwszego, Sybilla ułożyła kilka trójkątów, a następnie wypełniła tabelkę wspólnie z Pauliną. Jako metodę pracy przy wypełnianiu tabelki wspólnie podały zasadę: dodaję za każdym razem trzy. Przechodząc do pytania drugiego zmieniły regułę na: pomnóż liczbę trójkątów przez 3. Jako ogólną regułę podały: trzeba liczbę trójkątów pomnożyć przez 3, bo każdy trójkąt ma 3 boki. W przypadku zadań z arkusza drugiego dziewczynki postępowały podobnie. W tabelce dodawały 4, a w pytaniu drugim mnożyły przez 4. Jako ogólną regułę podały: pomnóż liczbę kwadratów przez 4.

Nikola dwa pierwsze arkusze wypełniała samodzielnie. Nie układała żadnych figur, od razu przechodziła do wpisywania odpowiednich wartości w tabelce. Od samego początku stosowała regułę wiążącą liczbę figur z liczbą zapałek, potrafiła je również uogólnić dla dowolnego elementu. Zarówno w rozwiązaniu Sybilli i Pauliny, jak i w rozwiązaniu Nikoli nie pojawił się zapis symboliczny, ale jedynie słowne wypowiedzenie ogólnej reguły.

Podczas pracy nad arkuszem trzecim Nikola i Sybilla tworzyły jeden zespół. Dziewczynki bardzo zgodnie współpracowały. Nikola pozwalała Sybilli jako pierwszej rozwiązywać zadanie, a jeżeli koleżanka miała z tym trudności, przejmowała inicjatywę, a następnie ponownie kazała jej powtórzyć całe rozumowanie.

Początkowo Sybilla nie rozumiała, co to znaczy „w jednym rzędzie". Nikola wytłumaczyła jej, o co chodzi, układając wzór z patyczków na ławce i objaśniając sposób jego powstawania:

1. S: [*czyta na głos treść zadania*] ...Co to znaczy w jednym rzędzie?
2. N: O tak [*ręką na ławce wskazuje rząd*] (...) Patrz, ułóż kwadrat [*Sybilla układa kwadrat*]. Teraz budujesz drugi tak [*Nikola dokłada trzy zapałki do kwadratu ułożonego przez Sybillę*]. Widzisz, tu masz trzy. I tak dalej układasz.
3. S: aha 4.
4. N: Czyli w pierwszym będzie cztery, a później trzy dodajesz.
5. S: Aha, to już wiem. (...) [*zaczyna wypełniać tabelkę*] No to dla jednego kwadratu to będzie cztery, (...) teraz dwa razy trzy, bo jest trzy zapałki tutaj [*zabiera jedną zapałkę z pierwszego kwadratu*].
6. N: [*dokłada zapałkę*] Teraz zobacz. Tu są dwa kwadraty. Nie dokładałyśmy trzy i trzy, tylko tu było cztery [*wskazuje pierwszy kwadrat*].
7. S: Siedem.
8. N: Tak, siedem. Do tego dodajesz trzy czyli...
9. S: Dziesięć.

Sybilla nie rozumiała, w jaki sposób powstaje wzorek. Nikola zaprezentowała koleżance, w jaki sposób buduje się kolejne kwadraty. Jej samej wystarczyły tylko dwa elementy, by „zobaczyć" całość i zrozumieć ogólną zasadę budowania wzorku. Dla Sybili było to za mało. Po dwóch elementach nie widziała jeszcze całej struktury. Sformułowanie „tu masz trzy, i tak dalej układasz" [1] czy „później dodajesz trzy" [3] mogło się jej skojarzyć z poprzednimi dwoma zadaniami. Tam cały czas dodawało się te same liczby, co miało przełożenie na ogólną regułę: pomnóż liczbę figur przez liczbę zapałek, które musisz dokładać. Stąd też zastosowała rozwiązanie: dla dwóch kwadratów będzie dwa razy trzy zapałki – przecież dokładam trzy. Dopiero ponowne wyjaśnienie sposobu układania przez Nikolę oraz zwrócenie uwagi na fakt, że na pierwszy kwadrat wykorzystujemy cztery zapałki, a na każdy następny trzy zaowocowało zrozumieniem zadania [7] i poprawnym wypełnieniem tabelki przez Sybillę.

Aby odpowiedzieć na pytanie o ilość zapałek potrzebną do zbudowania 10 kwadratów dziewczynki „przedłużyły" tabelkę, dodając po trzy zapałki do poprzedniej liczby, aż doszły do 10 kwadratów. Była to strategia jasna i zrozumiała dla obu dziewczynek, a wynikała bezpośrednio z wcześniej przyjętej strategii rozwiązywania zadania. Na tym etapie uczennice nie odkryły jeszcze żadnych zależności występujących między liczbą kwadratów a liczbą zapałek w tworzonym wzorze.

Liczba kwadratów	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	(8, 9, 10)
Liczba zapałek	4	7	10	13	16	19	22	(25, 28, 31)

Tab. 1. Przedłużanie tabelki

Po udzieleniu odpowiedzi na pytanie o 10 kwadratów Nikola postanowiła sprawdzić, czy uzyskany wynik jest poprawny. Być może w ten sposób chciała uprzedzić nauczyciela, który podczas pracy nad dwoma poprzednimi arkuszami po każdym rozwiązanym zadaniu pytał „dlaczego taki będzie wynik?", „skąd wiesz, że tak będzie?" A może intuicyjnie zastosowała postulowany przez G. Poly'a „rzut oka wstecz", wykazując się dużą dojrzałością matematyczną. Sprawdzenie poprawności wyniku odbywało się w następujący sposób.

10 N: ... Dziesięć razy cztery, czyli pełne kwadraty, będzie czterdzieści. A teraz nie wszystkie były z czterech zapałek, dziewięć było z trzech zapałek, nie?

11 S: Tak.

12 N: To odejmujemy sobie te dziewięć zapałek, czyli trzydzieści jeden, takie sprawdzenie.

13 S: No.

Sprawdzając, czy wynik jest poprawny, Nikola nawiązała do poprzedniego zadania oraz do sposobu tworzenia wzoru w tym zadaniu. Powiązała więc dwa różne, oddzielne doświadczenia, co ją doprowadziło do stworzenia modelu myślowego innego, niż rzeczywiście wykonana procedura. Jej rozumowanie wyglądało następująco: mam zbudować dziesięć kwadratów; gdyby były to oddzielne kwadraty, na każdy musiałabym wykorzystać cztery zapałki, czyli 4 x 10 = 40 zapałek. Ale moje kwadraty muszą być połączone, czyli tylko pierwszy będzie z czterech zapałek, a na każdy następny potrzebuję już tylko trzech, czyli o jedną zapałkę mniej. Takich „niepełnych" kwadratów zbuduję dziewięć, czyli dziewięć razy będę miała o jedną zapałkę mniej.

Ten sposób rozumowania okazał się bardzo pomocny w dalszej pracy nad zadaniem i doprowadził do odkrycia ciekawych zależności. Tutaj wykorzystały inne powiązania: skorzystały z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania. Skupienie uwagi na własnościach działań, na tym aby „poprawnie wykorzystać arytmetykę" spowodowało, że zapomniały o strukturze wzorku i występujących tam zależnościach.

Odpowiadając na pytanie o liczbę zapałek dla 25 kwadratów dziewczynki zastosowały następującą strategię: (1) 25 to 2x10 i 5. (2) Na 10 kwadratów potrzeba 31 zapałek, co wiemy z zad.2a). (3) Zatem 20 kwadratów to 2x31 czyli 62 zapałki. (4) I jeszcze dodaję 5 kwadratów czyli 5x3 zapałki. (5) Czyli w sumie mam 77 zapałek. Dokonując sprawdzenia dziewczynki zauważyły błąd.

14 N: Jest dwadzieścia pięć kwadratów, razy cztery [*Sybilla liczy na kalkulatorze*] to jest sto. Ale musimy jeszcze odjąć dwadzieścia cztery (...) [*odczytuje wynik z kalkulatora*] siedemdziesiąt sześć. Dlaczego się pomyliłyśmy?

Dziewczynki chcą znaleźć źródło błędu. W tym celu ponownie przeliczają zadanie, wykorzystując kalkulator. Powtarzają przy tym dokładnie to samo rozumowanie, które doprowadziło do błędu.

15 N: No to, to będzie tak [*liczy na kalkulatorze*]: dziesięć razy cztery to jest czterdzieści, odjąć dziewięć równa się trzydzieści jeden [*sprawdza wynik na kartce*]. Dobrze zrobiłyśmy. Teraz trzydzieści jeden razy dwa to jest sześćdziesiąt dwa (...) I teraz musimy jeszcze dodać te pięć kwadratów czyli pięć razy trzy czyli piętnaście.

16 Nauczyciel: A dlaczego dodajecie dwa razy trzydzieści jeden?

17 N: Żeby było dwadzieścia kwadratów.

18 Nauczyciel: Dobrze, te trzydzieści jeden to będzie taki jeden rząd złożony z dziesięciu kwadratów, tak?

19 N: Tak.

20 Nauczyciel: I do niego dokładacie drugi rząd z dziesięciu kwadratów, tak? Do pierwszego rzędu kwadratów dokładamy drugi, żeby powstał jeden długi rząd złożony z dwudziestu kwadratów. (...) A jak macie ułożony rząd z dziesięciu kwadratów i obok drugi rząd z dziesięciu kwadratów i jeżeli teraz dosuniecie je do siebie...

21 N: To musimy wziąć jedną zapałkę... Aha [*poprawia wynik*] czyli dobrze siedemdziesiąt sześć. Ok. No to sto sześćdziesiąt jeden. No to zróbmy tak: [*zapisuje na kartce*] sto sześćdziesiąt jeden razy cztery .

22 S: [*liczy na kalkulatorze*].

23 N: Ok., to teraz... [*bierze kalkulator i wykonuje obliczenia* 644 – 160] ... czterysta osiemdziesiąt cztery.

Jako sprawdzenie teraz Nikola wykorzystała następujące rozumowanie: od 484 zapałek odejmuję 4 – bo tyle potrzeba na pierwszy kwadrat. Teraz 480 dzielę przez 3 – bo pozostałe kwadraty mają po 3 zapałki. Otrzymuję 480 : 3 – 160. Jest 160 kwadratów niepełnych plus ten pierwszy, co daje nam 161.

Strategia, która do tej pory była jedynie sposobem na sprawdzenie wyniku, stała się regułą, według której uczennice rozwiązywały zadanie. Okazało się, że jest ona niezawodna - pozwoliła wykryć błąd przy poprzednim rozwiązaniu. Jest przy tym jasna i klarowna. Łatwo ją stosować, ma zastosowanie do wszystkich przykładów.

24 Nauczyciel: A gdybyście miały ułożyć tysiąc kwadratów?

25 N: To jest łatwe. Patrz. Piszemy tysiąc, nie? [*zapisuje* 1000] tak jak tu robiłyśmy i mnożymy przez cztery. (...) I od tych czterech tysięcy co trzeba?

26 S: Odjąć.

27 N: Odjąć tę jedną zapałkę od każdego kwadratu oprócz pierwszego.

28 S: No. Czyli odjąć trzy.

29 N: Dlaczego trzy? (...) Patrz, masz tysiąc kwadratów, pomnożysz przez każdy taki [wskazuje na ułożony kwadrat z czterech zapałek] czyli przez cztery, tak jakby każdy miał cztery boki, prawda? I masz cztery... nie, to można zrobić inaczej.

30 S: Cztery tysiące.

31 N: Tysiąc pomnożyć przez trzy to będzie trzy tysiące.

32 S: Tak.

33 N: I teraz co zrobimy? Dodasz jednego kwadrat, tego z czterech. Ten sposób wydaje mi się łatwiejszy.

W trakcie rozmowy Nikola zauważyła jeszcze inną zależność zachodzącą między liczbą kwadratów i liczbą zapałek. Udało jej się to zauważyć dzięki każdorazowemu sprawdzaniu poprawności wyniku. Była to zależność, która nie odzwierciedlała rzeczywistego sposobu tworzenia wzoru. Wydaje się, że była sprowokowana samą procedurą arytmetyczną (przewidywanymi trudnościami w prowadzeniu myślowych obliczeń na dużych liczbach). Nastąpiła więc racjonalizacja postępowania i przejście na łatwiejszą metodę. Aby ją odkryć, uczennica musiała elastycznie połączyć podejście arytmetyczne z geometryczną interpretacją rachunków i dokonać rozkładu każdego kwadratu na figurę zbudowaną z 1 + 3 boków. Nikola jednym aktem myśli ogarnęła cały proces tworzenia wzorku, budowanego "od końca", czyli od niepełnych kwadratów, teraz – zgodnie z instrukcją: biorę trzy zapałki, dokładam kolejne trzy, później kolejne trzy itd., a po ich zbudowaniu „domykam" pierwszy kwadrat dokładając brakujący bok. W takim podejściu kwadrat nie funkcjonuje jako całość (nie jest reprezentowany globalnie jako określony kształt), ale jako twór konstruowany, w którym boki (i inne własności) posiadają niezależny status.

Podana przez dziewczynki ogólna reguła dla tego zadania brzmi: pomnóż liczbę kwadratów przez trzy i dodaj jeden.

Podsumowanie

W przeprowadzonych badaniach uczniowie bardzo dobrze poradzili sobie z nowym dla nich zadaniem. Potrafili dostrzegać występujące w zadaniu zależności, stosowali poprawnie zauważone reguły. Rozwiązując zadanie uczniowie korzystają ze zbioru wiadomości, jaki wcześniej udało im się zgromadzić. Wykorzystują informacje o kwadracie oraz o tym, jak ma wyglądać wzorek. Te dane pozwalają im na stworzenie ogólnego modelu – „generic model" (Hejný, Kratochvílová 2005) dotyczącego powstawania kolejnych elementów układanki. Potrafią odkrytą przez siebie zależność uogólnić i podać jej słowny zapis. Zatem potrafią oderwać się od konkretu i myśleć abstrakcyjnie.

Zaprezentowany tu fragment badań pokazuje, jak bardzo różne są drogi myślowe dziecka. Widać również jak bardzo ważna jest w procesie rozwiązywania zadania werbalizacja własnych myśli oraz sprawdzenie swojego toku rozumowania – weryfikacja już uzyskanych wyników. Mówił o tym wyraźnie G. Polya – „rzut oka wstecz". Podczas sprawdzania poprawności wykonania zadania uczennice odkryły nowe podejście do zadania. Zatem poprzez weryfikację słowną były w stanie zmienić swoje spojrzenie na zadanie. Werbalizacja spowodowała zmianę ich działania. Dzięki temu potrafiły uogólnić zauważoną regułę.

Najważniejsza dla osiągnięcia sukcesu w rozwiązywaniu zadań całej serii była umiejętność tworzenia powiązań między doświadczeniami zebranymi na wcześniejszych poziomach, jak i tworzenie powiązań z innymi fragmentami wiedzy matematycznej. Pierwsze zadanie dało szansę na stworzenia uogólnienia dla szukania odpowiedzi o liczbę zapałek, potrzebną dla budowania oddzielnych figur. To doświadczenie zaowocowało w zadaniu drugim – uczniowie na ogół bez problemów przenosili strategię z zadania o trójkątach na zadanie o kwadratach. Tak również postąpiły dziewczynki z opisywanego tutaj zespołu. Strategia liczenia ilości elementów dla szlaczka składającego się z 10 połączonych kwadratów była przyniesieniem strategii pracy z zadania o oddzielnych kwadratach, ale na poziomie sprawdzenia tego zadania nastąpiło nowe odkrycie, nie będące werbalizacją stosowanej procedury.

Kolejny ważny moment, który zaowocował nowymi odkryciami - to przejście od myślowej procedury przeliczania zapałek we wzorku z zadania 3 do zastosowania prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania. Licząc ilość zapałek dla wzorku zbudowanego z 25 kwadratów automatycznie przeszły na strategię liczenia zapałek dla 20 kwadratów (rozumianych jako 2 x 10) oraz 5 kwadratów. Strategia okazała się nieskuteczna, ale godnym podkreślenia jest fakt, że w ogóle została przez uczennice zastosowana. Potrzeba sprawdzenia poprawności uzyskanego wyniku zmusiła dziewczynki do weryfikacji tej strategii i do poszukiwania nowych powiązań. Tym razem w twórczy sposób zostały wykorzystane doświadczenia z pierwszego i drugiego zadania. Dziewczynki przetworzyły tamte doświadczenia prowadzące do strategii przemnażania ilości elementów (figur) przez liczbę zapałek potrzebnych do zbudowania jednej figury. Teraz powtarzały się „niepełne figury” (mające sens jedynie poprzez funkcjonowanie w szlaczku, jako jego kolejne motywy). Jedynie pierwszy element składał się z „pełnej” liczby boków. Stąd też aby podać liczbę zapałek potrzebnych do ułożenia danego wzorku należy do wyniku uzyskanego poprzez pomnożenie wszystkich elementów przez „niepełny kwadrat” czyli 3, dodać jeszcze pierwszą, „domykającą” zapałkę.

Dziewczynki prezentowały różny poziom wiedzy. Bez względu jednak na to obie potrafiły odnaleźć się w „algebraicznej rzeczywistości”. Obie pokazały, że potrafią myśleć algebraicznie, mimo że w różnym stopniu opanowały arytmetykę. Jednocześnie arytmetyka, zbytnie skupienie się na obliczeniach i poprawnym stosowaniu reguł arytmetycznych, przeszkadzały w rozwiązaniu, zaciemniały bądź przesłaniały istotę zadania. Może zatem warto rozwijać myślenie algebraiczne niezależnie od arytmetycznego?

Literatura

[1] Białecki I., Blumsztajn A., Cyngot D.: 2003; *PISA – Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Ucznia*, Ośrodek Usług Pedagogicznych i Socjalnych ZNP, Warszawa.

[2] Blanton, M., Kaput, J.: 2003; *Developing elementary teachers' algebra eyes and ears*, Teaching Children Mathematics, 10(2), 70–77.

[3] Consogno, V.: 2005; *The semantic-transformational function of verbal language*, Proc. of CERME4, Feb. 17–21, Sant Feliu de Guixols, Spain, http://cerme4.crm.es/

[4] Hejný, M., Littler, G.: 2002; *The Beginnings of Algebraic Thinking*, w: Bergsten, C., Grevholm, B. (red), Challenges in Mathematics Education.

[5] Kaput, J., Carraher, D., Blanton, M.: 2008; *Algebra in the early grades*, New York: Lawrence Erlbaum.

[6] Littler, G. H., Benson, D. A.: 2005a; *Patterns leading to generalization*, Proceeding of SEMT'05, Prague, Charles University, s. 202–210.

[7] Littler, G.H., Benson, D.: 2005b; *Patterns leading to Algebra*, in: *IIATM – Implementation of Innovation Approaches to the Teaching of Mathematics*, Comenius 2.1.

[8] MacGregor, M., Stacey, K.: 1999; *A flying start to algebra. Teaching Children Mathematics*, 6(2), 78–85.

[9] Malara, N., Navarra G.: 2003; *ArAl project. Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*, Pitagora Editrice, Bologna.

[10] Mutschler, B., J.: 2005; *Early algebra – processes ad concepts of fourth graders solving algebraic problem*, Proc. of CERME4, Feb. 17-21, Sant Feliu de Guixols, Spain, http://cerme4.crm.es/

[11] Pytlak, M.: 2006; *Uczniowie szkoły podstawowej dostrzegają regularności*, Roczniki Polskiego Towarzystwa matematycznego, seria V, Dydaktyka Matematyki 29, 115–149, Kraków.

[12] Pytlak, M.: 2008; *Dostrzeganie regularności przez uczniów gimnazjum* – komunikat z badań własnych, http://fdm.e-dlaszkoly.pl/file.php/6/CD/XIXSDM.html

[13] Radford, L., Bardini, C., Sabena, C.: 2009; *Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations*, Proceedings of CERME 6, Lyon, Francja.

[14] Skemp, R.: 1979; *Inteligence, Learning and Action: A New Model for Theory and Practice in Education*, Chichester, Wiley&Sons Ltd.

[15] Stacey, K., Chick, H., Kendal, M. (Eds.). : 2004; *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, The 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.

[16] Steinbring, H.: 2005; *The construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interactions, an Epistemological Perspective*, Mathematics Education Library, Springer, New York.

[17] Swoboda E.: 2006; *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.

[18] Wittman, E.: 2001; *Designing, Researching and Implementing Mathematical Learning Enviroment*, The Research Group „Mathe 2000".

[19] Wygotski, L. S.: 1989; *Myślenie i mowa*, PWN, Warszawa.

[20] Zazkis, R., Liljedahl, P.: 2002; Repeating patterns as a gateway. *Proc. 26th Conf. of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. I.* (pp. 213–217), Norwich, UK: University of East Anglia.

Autorka pracuje w Uniwersytecie Rzeszowskim
mpytlak@univ.rzeszow.pl

Stimulating of algebraic reasoning in environment of regularities

Summary

Algebra is a topic that is very often omitted within polish primary schools' curriculums. Teaching mathematics at this level is mostly focused on shaping abilities and knowledge on arithmetic. Meanwhile a lot of time has been devoted to discussing teaching algebra at primary schools. It's being discussed about so called primary algebra that is about introducing of algebraic reasoning. (Mutschler, 2005). It's very hard though, to differentiate between algebraic and arithmetic reasoning. One of the suggested ways of developing algebraic reasoning is "superstructure" above arithmetic reasoning. It's done through generalization arithmetic considerations by substituting constants. We can obtain it thanks to setting tasks that are based on discovering arithmetic-geometric dependencies that are able to be generalized and written down using symbols.

Discovering and pointing down regularities by pupils is very important issue that is present at world's teaching mathematics trends. In many countries attention is paid to rhythm and regularities. A lot of descriptions of conducted researches that trace discovering and generalization of spotted rules can be found in literature(Zazkis, Liljedahl, 2002, Littler, Benson, 2005). Looking for regularities is particularly effective while solving mathematic problems as it's consider to be a good strategy in working out these tasks.

My research shows some partial results of researches that have been carried out at primary school among fourth grade students. These researches trace issue of discovering regularities that may be helpful in creating algebraic connections. I elaborated general strategies that are use by students during their work at particular tasks and draw attention to work and reasoning of one pair students chosen from the whole group of pupils who took part in the research.

Part of the research that I presented shows exactly how much differ ways of children reasoning. It is also apparent how big and important role play verbalization of one's own thoughts and looking up steps of one's reasoning and verification of results. This issue was underlined by G. Poly who took attention to "Throwing one's eye back". During looking up the accuracy of performing task students discovered new attitude towards the same task. This shows that through verbal verification students are able to change their points of view as the verbalization caused it. Thanks to it students were able to generalize the rule that they once have spotted.

Girls presented different level of knowledge. Regardless of this difference, both of them were able to find themselves in algebraic reality. They showed that they both possess algebraic reasoning even though they had different levels of arithmetic knowledge. Arithmetic simultaneously with focusing on calculations and proper usage of arithmetic rules hindered process of solving task and in some way made it more difficult to see and understand properly the core of their actions. It leads to asking the question that it may be better if the algebraic reasoning were developing independently of the arithmetic one?