Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Marianna Ciosek (Kraków)
Janina Duda (Zabrze)

Uogólnienie empiryczne i uogólnienie teoretyczne według W. Dörflera[1]

Streszczenie

W opracowaniu tym znajdą się rozważania na temat uogólniania, przedstawione przez W. Dörflera w pracy *Forms and means of generalization in mathematics* (1991). Jednym z dwóch ważnych punktów tych rozważań jest krytyka takiego sposobu wprowadzania pojęć matematycznych w szkole, dla którego podstawę stanowi uogólnienie empiryczne. Drugi punkt rozważań dotyczy wprowadzonej przez autora wspomnianej pracy kategorii pojęciowej, jaką jest uogólnienie teoretyczne. Przedstawimy teoretyczny schemat (model) uogólniania, demonstrujący istotne cechy procesów, prowadzących często do pojęć matematycznych, oraz podejmiemy próbę wyjaśnienia go, między innymi, za pomocą przykładów, do których odwołuje się Dörfler. Podamy też przykłady autentycznych rozumowań uczniów, którzy dokonywali uogólnień, i zanalizujemy je przez pryzmat omówionego modelu teoretycznego.

Ogólne uwagi o uogólnianiu

Dörfler stwierdza, że zarówno w życiu codziennym, jak i myśleniu naukowym uogólnienia odgrywają wielką rolę, jako (ogólne) pojęcia, stwierdzenia, deklaracje, idee, hipotezy, argumenty itd. Znaczenie uogólnień nie ogranicza się tylko do indywidualnego myślenia, ale odnosi się w równym stopniu do komunikacji społecznej. Uogólnienia są zarówno obiektami, jak i środkami myślenia oraz komunikacji. W. Dörfler pisze, że w zasadzie nie definiuje się takich podstawowych pojęć jak „uogólnianie" i „uogólnienie" bez użycia tautologii. Sam podaje następujące wyjaśnienie, co rozumie przez te terminy.

[1]Profesor Willibald Dörfler pracuje w Instytucie Matematyki Uniwersytetu w Klagenfurt (Austria). W latach 1993–1999 pełnił funkcję rektora tego Uniwersytetu; w latach 1990–1995 był redaktorem naczelnym czasopisma Educational Studies in Mathematics. Jednym z zainteresowań badawczych Profesora jest interdyscyplinarne zagadnienie „Epistemologiczny i psychologiczny status obiektów matematycznych".

> Uogólnianie rozumiem jako społeczno-poznawczy proces, który prowadzi do czegoś ogólnego (lub ogólniejszego), i którego rezultat, jakim jest uogólnienie, w konsekwencji odnosi się do aktualnej bądź potencjalnej zbiorowości.
> (Dörfler, 1991, s. 63)

Uogólnianie – pisze dalej autor – można traktować jako proces psychiczny, w ramach procesów poznawczych jednostki, których wyniki odpowiadają strukturom poznawczym (schematy, ramy). Te procesy indywidualne są jednak zawsze uwarunkowane i rozważane społecznie, jako że wykorzystują i zależą od środków osiągniętych i przygotowanych przez społeczeństwo, jak np. język. W zasadzie – dodaje Dörfler – jako takie te procesy nie są obserwowalne; nic nie można powiedzieć o nich bezpośrednio, z wyjątkiem tego, co może być zaobserwowane dzięki komunikacji społecznej, jaką jest np. wywiad. Jednakowoż ma sens tworzenie naukowych teorii tych procesów. Można mówić o poziomie subiektywno-psychologicznym procesu uogólniania, jak i poziomie obiektywno-epistemologicznym tego procesu. Autor omawianej pracy prowadzi rozważania z punktu widzenia epistemologii, ponieważ – jak zapowiada – analizuje wiedzę matematyczną w odniesieniu do uogólnień i procesów, które do nich prowadzą.

Uogólnienie empiryczne

Jedna z form uogólniania uwzględnia nie tylko tradycyjną i klasyczną perspektywę rozważań nad tym procesem, ale stanowi również podstawę wielu propozycji dydaktycznych dla nauczania. Dla tej formy uogólniania podstawowym procesem jest poszukiwanie wspólnej jakości, własności kilku lub wielu obiektów albo sytuacji (głównie na podstawie percepcji zmysłowej), zauważenie i wypowiedzenie lub zapisanie tej własności, jako wspólnej i ogólnej dla tych obiektów lub sytuacji. Ta wspólna jakość (lub system takich jakości) jest wyizolowana umysłowo i oderwana od rozważanych obiektów lub sytuacji. Ten proces jest nazywany empiryczną lub Arystotelesowską abstrakcją.

Wiele pojęć (to jest uogólnień) w naukach empiryczno-opisowych mogłoby być rozwijanych w ten sposób, i to jest powód, dla którego ten rodzaj uogólnienia nazywa się uogólnieniem empirycznym.

W. Dörfler uważa, że podejście empiryczne do uogólnień i abstrakcji w nauczaniu matematyki na różnych poziomach jest bardzo często podstawą stosowanej metodyki nauczania. Nauczyciel demonstruje dane pojęcie, np. ułamka, funkcji itd., jako wspólną własność kilku tak zwanych wstępnych przykładów. W wielu podręcznikach szkolnych znajdują się sformułowania typu: „Wszystkie te przykłady pokazują taką to a taką własność, i jeżeli ta własność jest spełniona, to mówimy, że....”.

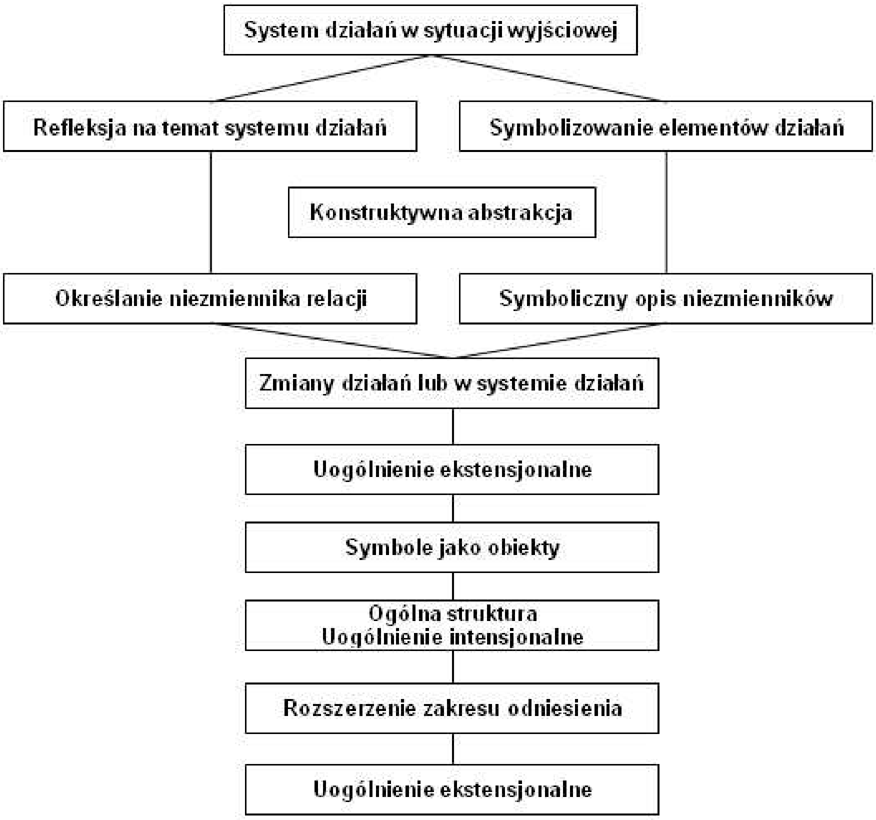
Autor pracy krytycznie ocenia ten sposób wprowadzania pojęć matematycznych z kilku powodów. Oto niektóre z nich.

1. Porównywanie i szukanie wspólnej cechy różnych obiektów i sytuacji jest oczywiście rodzajem aktywności, ale ta aktywność nie jest w żaden sposób związana z ogólną i wspólną strukturą, której się poszukuje. Porównanie służy jako środek selekcji tych cech, które są wspólne dla kilku lub wielu obiektów, ale w zasadzie porównanie będzie neutralne w stosunku do pojęcia, które jest konstruowane.
2. Ogólność jest traktowana jako już obecna w obiektach i sytuacjach; jest więc „tylko" wyabstrahowana i odrywana od tych obiektów. To, co ogólne jest odkrywane, a nie konstruowane, i w zasadzie rozpoznane głównie za pomocą percepcji zmysłowej (przede wszystkim wzroku).
3. Ogólność, która jest formowana przez poszukiwanie wspólnej cechy kilku obiektów, nie może być rozwijana i uogólniana w dalszym ciągu, ponieważ ogranicza się do typu tych obiektów, których wspólną cechę reprezentuje.
4. Różne obiekty i sytuacje często mają kilka wspólnych własności. Jak uczący się ma zdecydować, o jaką własność chodzi? Dlaczego ta, a nie inna własność uznawana jest za tą wspólną?
5. W procesie dydaktycznym nie można w istocie w sposób pełny sprawdzić czy uczący się ma prawidłowo uformowaną ogólną własność, która była zamierzona przez nauczyciela. Sposobem badania czy pojęcie zostało dobrze ukształtowane jest pokazywanie uczniowi przykładów i kontrprzykładów do rozstrzygnięcia, który z nich podpada, a który nie, pod rozważaną nazwę. Wiadomo jednak, że „poprawne" rozstrzygnięcie może być wynikiem zastosowania „błędnego" kryterium. Innym źródłem błędu może być to, że uczący się zalicza do ogólnej cechy pojęcia przypadkowe cechy obiektów, np. kwadrat nie jest czasem przez ucznia rozpoznawany jako kwadrat, jeśli jego bok nie ma położenia horyzontalnego.

W. Dörfler widzi powód częstego stosowania empirycznego modelu uogólniania w nauczaniu w tym, że empiryczne uogólniania są źródłem wielu ogólnych pojęć w życiu praktycznym, a nawet w naukach empirycznych. W tym sensie nie można zaprzeczać ważności procesów uogólniania empirycznego.

Uogólnianie teoretyczne

Autor uważa, że modelem uogólniania ukazującym istotne cechy procesów prowadzących do prawidłowego formowania pojęć matematycznych jest model uogólnienia teoretycznego, który przedstawia poniższy schemat.



Schemat 1. Model uogólniania teoretycznego według Dörflera[2]

Ten schematyczny model jest następnie objaśniony przez scharakteryzowanie procesów prowadzących do uogólnień. Punktem wyjścia w uogólnianiu teoretycznym jest konkretny system działań (*system of actions*) – materialnych, wyobrażonych bądź symbolicznych. W szczególności elementami tych działań są pewne (materialne lub abstrakcyjne) obiekty. Wykonywanie działań kieruje naszą uwagę na pewne relacje między elementami tych działań. Te relacje okazują się być stałe, gdy powtarzamy działania (tyle razy, ile chcemy). Są to niezmienniki działań (*invarients of actions*). Stwierdzenie istnienia tych niezmienników wymaga pewnego opisu symbolicznego (*symbolic description*) – wprowadzenia symboli dla elementów działań lub dla odpowiadających im

[2]Intensja – w logice i językoznawstwie 'sens, treść danej nazwy – zbiór cech tego, do czego się ona odnosi'. Ekstensja – w logice i językoznawstwie 'zakres danej nazwy – klasa obiektów, do których się ona odnosi'. Markowski, Pawelec (2007).

wielkości, a także dla ich transformacji i ewentualnie kombinacji indukowanych z tych działań. Te symbole mogą mieć różną naturę; werbalną, ikoniczną, geometryczną lub algebraiczną. W każdym przypadku niezmienniki są opisane za pomocą tych symboli. Początkowo są one symbolami elementów działań lub ich numerycznymi bądź geometrycznymi charakterystykami (jeśli rzeczywiście odpowiadają działaniom), albo ich transformacjami. Dlatego też są one na początku reprezentantami elementów i odgrywają opisową rolę. Często podstawia się za nie prototypy wyjściowych elementów działań. Stwierdzenie niezmienników i dokonanie ich symbolicznego opisu ma charakter procesu abstrakcji (*process of abstraction*), ponieważ ujawnia pewne własności i relacje oraz kieruje na nie naszą uwagę. W ten sposób te własności i relacje osiągają niezależność – do pewnego stopnia – od elementów działań i obiektów wyjściowej sytuacji. Warto podkreślić, że jest to konstruktywna abstrakcja (*constructive abstraction*), ponieważ to, co jest wyabstrahowane, jest ustanowione w wyniku działań jednostki i osiąga znaczenie oraz „istnienie” przez te działania.

W wielu przypadkach elementy działania, i być może samo działanie, mają pewną dowolność w sytuacji wyjściowej. Elementy działania, i do pewnego stopnia same działania, mogą być zastąpione innymi tego samego typu, przy czym – co ważne – w każdym przypadku otrzymujemy te same niezmienniki, reprezentowane przez odnośny opis symboliczny. Od samego początku symbole mają pewien zakres odniesienia i ten zakres może być stopniowo rozszerzany. W tej czynności może pomóc pytanie: Jakie jeszcze inne działanie może mieć takie same niezmienniki jak działanie pierwotne? Dla uzyskania odpowiedzi na to pytanie poszukujemy takich sytuacji, by „struktura” niezmienników odpowiadającego jej działania była taka sama jak w wyjściowej sytuacji. To jest rodzaj uogólnienia rozszerzającego zakres odniesienia. Początkowo uogólnienie jest osiągnięte przez dostrzeżenie podobieństwa obiektów będących elementami działań (uogólnienie empiryczne). Później niezmienniki stają się kryterium dla wybierania obiektów jako elementów działań. Tak więc użyte na początku symbole są zmiennymi z własnością podstawiania (*variables with substitution–property*). Refleksja nad symbolicznym opisem niezmienników powoduje, że zmienia się charakter występujących w nim symboli. Nabierają one charakteru obiektów; stają się elementami samych działań, i jako takie są reprezentantami lub "nośnikami" niezmiennych relacji. Stają się niezależnymi obiektami (obiektywnie, ale także dla samego uczącego się). W ten sposób rozwija się nowy obiekt myślowy, obiekt matematyczny, którego znaczenie ustanawiają niezmienniki. Ten obiekt myślowy jest bytem ogólnym, ponieważ ma potencjalnie nieograniczony zakres odniesienia. Symbole występujące w jego opisie (niezmiennik) są teraz zmiennymi o charakterze obiektów (*variables with the character of objects*). Ta reifikacja (uprzedmiotowienie) zmiennych i symboli kończy proces abstrakcji, który rozpoczął się w momencie ustalenia niezmienników. W ten sposób niezmienniki są oderwane od ich oryginalnych (wyjściowych) „nośników"; osiągają niezależność i formę wyabstrahowanej ogólności. Tu abstrakcja jest środkiem dla rozwijania uogólnienia intensjonalnego (*intensional generalization*).

Skonstruowana ogólność, wyrażona przez użycie zmiennych jako konkretnych obiektów (dla elementów działań i dla działań) służy dalszemu uogólnianiu (*extensional generalization*). Przez odpowiednią interpretację zmiennych, nowe systemy działań są włączane jako podpadające pod tę ogólność i w ten sposób rozszerzany jest zakres odniesienia (*extensional generalization*).

Przykłady uogólnień teoretycznych

Swoją koncepcję teoretyczną W. Dörfler ilustruje przykładami, z których dwa przedstawiamy poniżej.

Pojęcie grupy

Obroty kwadratu (mod 2π) mogą służyć jako punkt wyjścia. Te obroty są elementami działań, a działaniami w tym systemie są składania obrotów. Relacje między elementami działań, czyli niezmienniki, to własności składania obrotów; wyrażone w języku algebry to: łączność składania, istnienie elementu neutralnego, możliwość utworzenia elementu przeciwnego do danego (tu również przemienność składania). Do stwierdzenia tych niezmienników dochodzi się w wyniku refleksji nad całym systemem działań, i zapisuje się je za pomocą symboli ustalonych dla elementów działań, czyli obrotów, oraz symbolu działania, jakim jest ich składanie. Fazą wstępnego uogólnienia przez rozszerzenie zakresu odniesienia (*extentional generalization*) mogłoby być przejście do innego n-kąta foremnego – z ustalonym n lub dowolnym, albo – w wyniku refleksji – całkowita zmiana systemu działań. Przykłady innych systemów: permutacje z działaniem składania, odpowiedni zbiór liczbowy z dodawaniem, zbiór macierzy określonego stopnia z działaniem dodawania itp. Traktowanie symboli jako konkretnych zmiennych (zapisanie przy ich pomocy niezmienników) powoduje, że konstruowana ogólność staje się formalną strukturą grupy (*intensional generalization*). Rozważanie sytuacji z innymi systemami działań może również służyć jako rozszerzenie zakresu odniesienia konstruowanego pojęcia.

Zadanie tekstowe

W. Dörfler stwierdza, że uogólnienie teoretyczne może mieć miejsce nie tylko przy formowaniu pojęć matematycznych. Procesy przedstawione w ogólnym modelu uogólniania występują np. przy konstruowaniu czegoś, co można nazwać ogólnym typem zadania tekstowego lub jego abstrakcyjną arytmetyczną strukturą. Oto przykład takiego zadania.

Zadanie 1

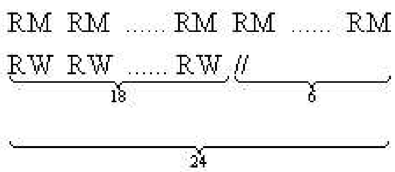
> Mężczyzna i kobieta szli przez pustynię. Jeśli ich porcje wody na dzień pozostają stałe, to zapas wody wystarczy im na 18 dni. Samemu mężczyźnie zapas wody wystarczyłby na 24 dni. Jaką część dziennej porcji wody przeznaczonej dla mężczyzny wypija kobieta?

Działania, które sobie możemy tu wyobrazić, będą służyć jako sytuacja startowa dla procesu uogólnienia. Różne racje dzienne wody dla mężczyzny i kobiety stają się elementami działania. Rozwiązanie zadania polega na wyobrażaniu sobie przelewania wody z 6 pojemników, każdy z dzienną porcją wody mężczyzny (RM) do 18 pojemników, z których każdy ma pojemność odpowiadającą dziennej porcji wody dla kobiety (RW), a następnie zapisanie relacji (niezmiennika) między tymi elementami działania. Ten niezmiennik może być przedstawiony w różny sposób, na przykład:

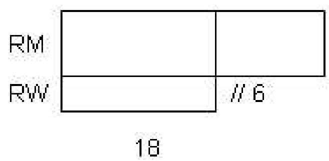
a) algebraiczny
   6 RM = 18 RW
   1 RM = 3 RW

b) werbalny
   Mężczyzna pije w 6 dni tyle co kobieta wypija w 18 dni.

c) ikoniczny



d) geometryczny



Inną możliwą relację (niezmiennik) możemy ująć równaniem:

24 RM = 18 RW + 18 RM.

Uświadamiamy sobie, że ta relacja między elementami działania może się odnosić do różnych wielkości. Proces uogólnienia będzie się odnosił do opisanego niezmiennika. Liczby 6, 18, 24 oraz racje wody RM, RW mogą być przekształcone w zmienne. Można to wyrazić werbalnie przez użycie zwrotu „pewna liczba dni". Pierwsza faza uogólnienia przez rozszerzenie zakresu odniesienia mogłaby prowadzić do sformułowania zadania ogólnego o następującej treści.

> Całkowita ilość towaru może zostać umieszczona w m pojemnikach o wielkości A i m pojemnikach o wielkości B lub dokładnie w n pojemnikach o wielkości A. Jaki jest stosunek wielkości A do wielkości B?

Strukturę tego zadania może ujmować poniższy algebraiczny opis:

$mA + mB = nA,$

$(n - m)A = mB.$

Należy podkreślić, że na tym etapie A, B są zmiennymi o charakterze obiektów. Znaczy to, że nie mają danego zakresu odniesienia. Są niezależnymi obiektami, na których można wykonywać manipulacje zgodnie z pewnymi zasadami arytmetyki.

Przykłady uogólnień dokonywanych przez uczniów w świetle modelu Dörflera

W. Dörfler podkreśla, że źródłem systemu działań lub sytuacji wyjściowej (*the starting situation*) może być odpowiednio sformułowane zadanie problemowe. W sytuacji szkolnej powinno ono być dostosowane do poziomu wiedzy uczniów i ich indywidualnych zainteresowań. Decydujące znaczenie ma również problem motywacji uczniów do podjęcia pracy nad takim zadaniem. Nauczyciel pełni więc w tym zakresie, jak pisze Dörfler, dominującą rolę, pod warunkiem, że dobrze zna swoich uczniów i ich zainteresowania. Dörfler nie porusza zagadnienia wykorzystywania w procesie uogólniania nowoczesnych narzędzi technologii informacyjnej. Badania dydaktyczne pokazują, że narzędzia te mogą skutecznie motywować uczniów do podejmowania prób rozwiązania problemu, a także pozytywnie wpływać na jego rozwiązanie. Przykłady takich badań są prezentowane w pracach (np. Adamczak, 2003; Kąkol & Ratusiński, 2007; Makiewicz, 2004; Juskowiak, 2004, 2005; Herma, 2004, 2007; Wojtuś, 2007; Duda, 2008, 2009a, 2009b, 2011; Wadoń-Kasprzak, 2008; Kąkol & Pająk, 2009). Jednym z narzędzi technologii informacyjnej jest kalkulator graficzny. Poniżej prezentowane jest przykładowe zadanie (Duda, 2008), które prowadzi uczniów do uogólniania, a kalkulator graficzny pełni w tym procesie, zarówno funkcję narzędzia badawczego, ułatwiającego eksperymentowanie, jak i funkcję motywacyjno-emocjonalną.

Zadanie 2

Rozwiąż za pomocą kalkulatora graficznego następujące układy równań:

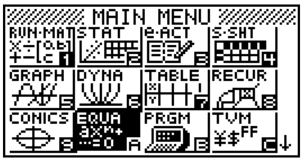
a) $\begin{cases} 18x + 19y = 20 \\ 21x + 22y = 23 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 1252x + 1253y = 1254 \\ 1255x + 1256y = 1257 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 18x + 19y = 20 \\ 21x + 22y = 23 \end{cases}$.

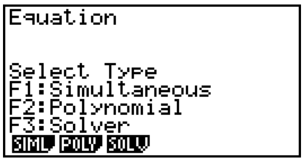
Co zauważyłeś? Sformułuj odpowiedni wniosek i spróbuj go uzasadnić. Spróbuj zbudować inne układy równań o pewnych szczególnych własnościach. Przebieg pracy z kalkulatorem graficznym zanotuj dokładnie w „okienkach".

Badania wykorzystujące to zadanie zostały przeprowadzone w grupie 32 uczniów o różnym poziomie zdolności, z czterech oddziałów trzecich klas gimnazjalnych. Zadanie to zainspirowało 31 uczniów do eksperymentowania, stawiania i empirycznego weryfikowania hipotez oraz uogólniania. Pięciu uczniów podjęło próby weryfikacji teoretycznej. Sformułowane hipotezy mają różny stopień ogólności. Sześciu uczniów w tej grupie, wywodzących się z jednej klasy, w której realizowany był program pt. „Program nauczania matematyki w gimnazjum z wykorzystaniem kalkulatorów graficznych i komputera" (Kąkol, 2001), uznano za uzdolnionych matematycznie na podstawie kryterium psychopedagogicznego. Praca tych uczniów została omówiona w artykule „Odkrywanie matematyki z kalkulatorem graficznym (fragment badań)" (Duda, 2008). Dla 11 uczniów z tej 32–osobowej grupy było to pierwsze zadanie, które wymagało samodzielnego formułowania wniosków i pierwsze zetknięcie z kalkulatorem graficznym (ich pracę poprzedził stosowny instruktaż, dotyczący obsługi kalkulatora graficznego).

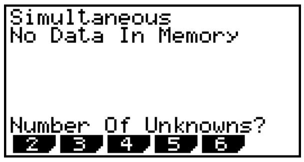
Uczniowie pracowali w czasie ograniczonym do 60 minut i korzystali z odpowiedniego trybu pracy EQUA kalkulatora graficznego. Nie mieli żadnych trudności z rozwiązywaniem układów równań za pomocą tego narzędzia. Najpierw kolejno rozwiązywali każdy z podanych układów i sporządzali notatkę na karcie pracy. Rysunki od 1 do 6 przedstawiają poszczególne etapy pracy uczniów nad rozwiązaniem układu wymienionego w punkcie a), natomiast rysunek 7. przykładową notatkę sporządzoną przez Martynę.



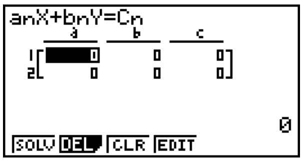
Rys. 1



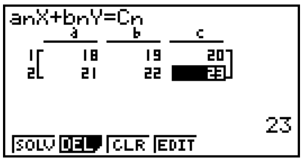
Rys. 2



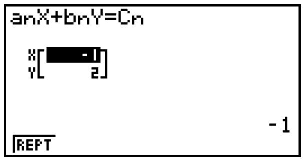
Rys. 3



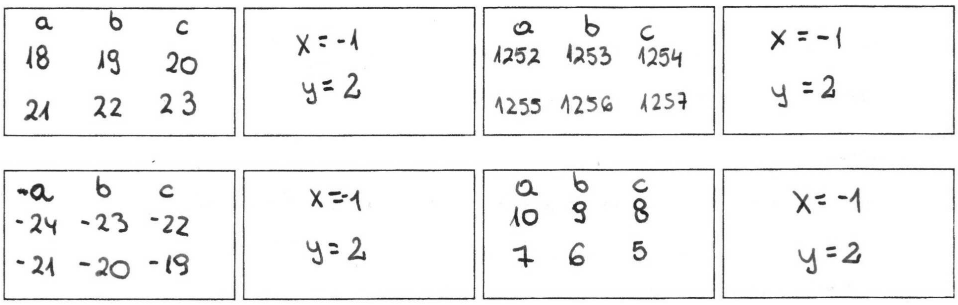
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7. Kopia notatek Martyny

Po rozwiązaniu trzech podanych układów równań okazało się, że każdy miał to samo rozwiązanie: $x = -1$ i $y = 2$. Uczniowie zauważyli też, że kolejne współczynniki każdego z układów różnią się o 1.Tę zależność sprawdzili na innych przykładach za pomocą kalkulatora. Niektórzy uczniowie sformułowali wówczas stosowne hipotezy; zapisywali je tak jak potrafili. Każdy z tych uczniów dokonał uogólnienia na układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi, których współczynniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 1. Rysunki 8 i 9 przedstawiają przykładowe prace.

Wniosek:

Jeżeli za ~~tie~~ współczynnik a_1 weźmiemy jakąś liczbę i każdy kolejny współczynnik b_1; c_1; a_2; b_2; c_2 zwiększymy o 1 to wynik zawsze wyjdzie:

x [−1]

y [2]

czyli:

$b_1 = a_1 + 1$

$c_1 = a_1 + 2$

$a_2 = a_1 + 3$

$b_2 = a_1 + 4$

$c_2 = a_1 + 5$

Rys. 8. Kopia notatek Grzegorza

1) Zawsze rozwiązaniem układu

$$ax + (a+1)y = a+2$$
$$(a+3)x + (a+4)y = a+5$$

jest: $x = -1$, $y = 2$

Rys. 9. Kopia notatek Marzeny

Pozostali uczniowie zainspirowani swoim „odkryciem" od razu zaczęli eksperymentować dalej i ich pierwsze zapisane hipotezy – uogólnienia mają już charakter ogólniejszy. Przykładowe prace prezentują rysunki 10, 11 i 12.

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$$

liczby: A, B, C, D, E, F należą do liczb całkowitych

I WNIOSEK:

jeśli w całym układzie $B = A+1$, $C = B+1$, $D = C+1$ itd. lub w całym układzie $B = A-1$, $C = B-1$, $D = C-1$ itd. to rozwiązaniem układu jest $x = -1$ i $y = 2$

Rys. 10. Kopia notatek Martyny

Wniosek 1

a	b	c
n	$n+m$	$n+2m$
$n+3m$	$n+4m$	$n+5m$

Jeżeli liczby prezentuję się jak w w/w ~~ukł~~ układzie, to rozwiązaniem są liczby: $x=-1$ $y=2$,

Rys. 11. Kopia notatek Moniki

Jeżeli

$a < b < c$

$a > b > c$ i liczby te zwiększają się ~~ze~~ (bądź zmniejszają) zawsze o tę samą wartość to rozwiązaniem układu równań z dwiema niewiadomymi są zawsze liczby -1 i 2. Własności ta nie działa przy równaniach z większą ilością niewiadomych.

Rys. 12. Kopia notatek Natalii

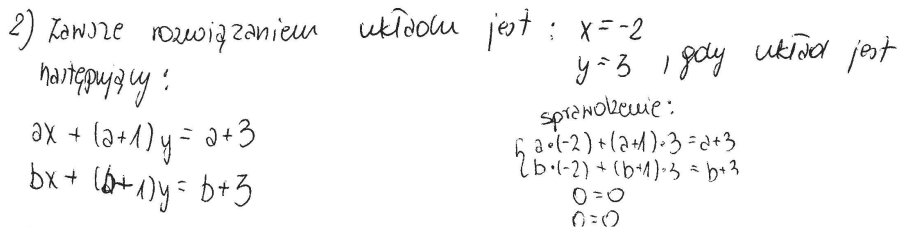
Dalsze eksperymentowanie doprowadziło niektórych uczniów do kolejnych uogólnień zapisanych już hipotez bądź do uogólnień o innym charakterze. Przykładowe prace przedstawiają rysunki 13 i 14.

II WNIOSEK:

jeśli $A + B = C$, a $D + E = F$ to rozwiązaniem układu jest $x=1$ i $y=1$

Rys. 13. Kopia notatek Martyny[3]

[3]Ciąg dalszy notatek Martyny, prezentowanych na rysunku 10.


2) Zawsze rozwiązaniem układu jest: $x=-2$, $y=3$, gdy układ jest następujący:

$ax+(a+1)y=a+3$

$bx+(b+1)y=b+3$

sprawdzenie:

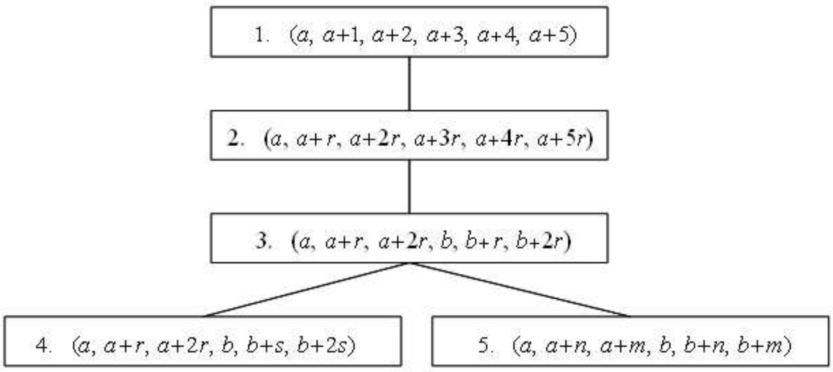
$\begin{cases} a\cdot(-2)+(a+1)\cdot 3=a+3 \\ b\cdot(-2)+(b+1)\cdot 3=b+3 \end{cases}$

$0=0$

$0=0$

Rys. 14. Kopia notatek Marzeny

Jedna z hipotez była przez niektórych uczniów uogólniana stopniowo, co pokazuje poniższy schemat.



Schemat 2. Uogólnianie hipotezy

Rozwiązaniem każdego z układów 1, 2, 3, 4 jest para: $x=-1$, $y=2$. Natomiast rozwiązaniem układu 5. jest para: $x=\frac{n-m}{n}$ $y=\frac{m}{n}$. Procesy uogólniania dokonywane przez uczniów (w rozwiązywaniu zadania 2) odpowiadają tym, które na modelu Dörflera mieszczą się w części „Konstruktywna abstrakcja". Nie są to uogólnienia teoretyczne, ponieważ nie zawierają rozszerzenia zakresu odniesienia; uczniowie nie wyszli poza strukturę układu równań liniowych.

Zadanie 2, które było wykorzystane w opisanych badaniach można zaliczyć do zadań „na odkrywanie regularności". Przykłady innych badań dydaktycznych związanych z zagadnieniem regularności są opisane w pracach (np., Legutko, 2010, 2011; Pytlak, 2006; Zaręba, 2003, 2006; Garcia-Cruz i Martinon, 1997; Iwasaki i Yamaguchi, 2008).

Na zakończenie niniejszego opracowania chcemy zachęcić potencjalnych czytelników do refleksji na temat związku przedstawionych tu rozważań Dörflera z rozważaniami teoretycznymi innych dydaktyków na temat uogólnień, np. A. Z. Krygowskiej (1977).

Literatura

[1] Adamczak, M.: 2003, *Wykorzystanie nowych technologii w nauczaniu matematyki na poziomie akademickim,* w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 25, s. 241–247.

[2] Dörfler, W.: 1991, *Forms and means of generalization in mathematics*, in: Mathematical Knowledge: its Growth through Teaching, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/ London.

[3] Duda, J.: 2008, *Odkrywanie matematyki z kalkulatorem graficznym*, w: Współczesne Problemy Nauczania Matematyki, Forum Dydaktyków Matematyki, red. Kąkol, H., Bielsko-Biała, s. 175–187.

[4] Duda, J.: 2009a, *Twórczość matematyczna uczniów uzdolnionych a kalkulator graficzny* (fragment badań), w: Annales of the Polish Mathematical Society, Series V, Didactica Mathematicae 32, s. 43–92.

[5] Duda, J.: 2011, *Mathematical Creative Activity and the Graphic Calculator*, The International Journal for Technology in Mathematics Education (IJTME), University in Plymouth.

[6] Garcia-Cruz, J. A. y Martinon, A.: 1997, *Actions and invariant in linear generalising problems*, Proceeding of the XXI Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, pp. 289–296. University of Helsinki, Finland.

[7] Herma, A.: 2004, *Wpływ kalkulatora graficznego na rozwijanie wybranych aktywności matematycznych* (fragment badań wstępnych), w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 26, s. 81–94.

[8] Herma, A.: 2007, *Wpływ kalkulatora graficznego na rozwijanie wybranych aktywności matematycznych uczniów w wieku* 13–16 *lat*, w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 30, s. 111–125.

[9] Iwasaki, H., Yamaguchi, T.: 2008, *The Separation Model of Generalization in the Case of Division with Fractions*, The International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), Hiroshima University, Japan.

[10] Juskowiak, E.: 2004, *Analiza pracy uczniów z kalkulatorem graficznym podczas rozwiązywania zadań* (fragment badań) w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 26, s. 95–118.

[11] Juskowiak, E.: 2005, *Sposoby wykorzystania kalkulatora graficznego w procesie nauczania i uczenia się matematyki*, w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 28, s. 357–364.

[12] Kąkol H. (pod kier.): 2001, *Program nauczania matematyki w gimnazjum z wykorzystaniem kalkulatorów graficznych i komputera*, Wydawnictwo Dla szkoły, Wilkowice.

[13] Kąkol H., Ratusiński T. : 2007, *The role of computer in the process of solving of mathematical problems* (*results of research*), Teaching Mathematics and Computer Science 5, No 1, s. 67–80.

[14] Kąkol, H., Pająk, W.: 2009, *Rola programu komputerowego CABRI w rozwiązywaniu matematycznych problemów*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia, 69–104.

[15] Krygowska, Z.: 1977, *Zarys Dydaktyki Matematyki*, część 3, WSiP, Warszawa.

[16] Legutko, M.: 2010, *O umiejętności matematycznego uogólniania wśród nauczycieli i studentów matematyki specjalności nauczycielskiej*, w: Prace monograficzne z dydaktyki matematyki. Współczesne problemy nauczania matematyki 3, Bielsko Biała.

[17] Legutko, M.: 2011, *O uogólnianiu z wykorzystaniem liczb naturalnych w nauczaniu matematyki*, NiM + IT, 80, s. 18–25.

[18] Makiewicz, M.: 2004, *Twórczość matematyczna uczniów gimnazjów posługujących się środkami komputerowymi.* w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 27, s. 265–279.

[19] Markowski, A., Pawelec, R. : 2007, *Słownik wyrazów obcych i trudnych*, wyd. Langenscheidt, Polska.

[20] Pytlak, M.: 2006, *Uczniowie szkoły podstawowej odkrywają regularności*, w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 29, s. 115–150.

[21] Wadoń-Kasprzak, K.: 2008, *Kształtowanie pojęcia parametru na przykładzie rozwiązywania pewnego zadania*, w: Współczesne Problemy Nauczania Matematyki, Forum Dydaktyków Matematyki, red. Kąkol, H., Bielsko-Biała, s. 175–188.

[22] Wojtuś, R.: 2007, *Komputer w pozalekcyjnej pracy ucznia – fragment badań*, w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 31, s. 111–141.

[23] Zaręba, L.: 2003, *Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku* 10–14 *lat*, w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 27, s. 151–181.

[24] Zaręba L.: 2006, *Od przypadków szczególnych do symbolicznej formy uogólnienia typu indukcyjnego*, w: Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne; s. 117–126, pod red. M. Czajkowskiej, G. Trelińskiego; Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.

Marianna Ciosek pracuje w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie.
Janina Duda pracuje w Zespole Szkół Ogólnokształcących w Zabrzu

Empirical generalization and theoretical generalization according to W. Dörfler

Summary

Our analysis refers to the considerations on generalization presented by Dörfler in his paper *Forms and means of generalization in mathematics* (1991). One of two important issues is a critique of the way of introducing mathematical concepts in the school based upon empirical model of generalization.

The second issue refers to the conceptual category introduced by the quoted author, that is **theoretical generalization**. We'll present **a theoretical model** of generalizing which demonstrates the essential features of the processes which can often lead to mathematical concepts. Also, an attempt will be made to clarify this model with the help of, among other, examples referred to by Dörfler.

Examples of actual students' reasoning, in which they were performing generalizations, will be quoted and analysed from the point of view of that theoretical model.