Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Anna Laskowska (Zielona Góra)

Pomocnicza rola wykresu komputerowego przy rozwiązywaniu zadań z analizy matematycznej

Prowadząc zajęcia z analizy matematycznej nie sposób nie zauważyć potrzeby ilustracji graficznej różnych pojęć matematycznych. Co więcej, widać jak dzięki tym ilustracjom, to co jest niejasne, staje się zrozumiałe. Jest to widoczne zarówno w przypadku osób zaczynających swoją edukację matematyczną w wyższych uczelniach, jak i tych którzy powinni już dużo wiedzieć – magistrantów.

Posłużymy się dwoma cytatami mówiącymi o potrzebie korzystania z ilustracji graficznych w świecie matematyki.

„Chociaż w analizie matematycznej nie określa się funkcji graficznie, ale do graficznej ilustracji funkcji odwołujemy się zawsze. Przejrzystość i poglądowość wykresu czynią z niego niezastąpiony środek pomocniczy do badania funkcji.” (Fichtenholz, 1985, t. 1, s. 80).

Natomiast Sawyer (1988) w *W poszukiwaniu modelu matematycznego*, na stronie 42. pisze:

„Wykresy przenikają cały świat matematyczny, powinniśmy więc wyrobić w sobie zwyczaj rozważania, czy danej sytuacji nie może wyjaśnić właśnie wykres (. . .) Gdy napotkamy jakiś wykres po raz szósty, powie on nam więcej niż przy pierwszym razie (. . .) Przy pierwszym spotkaniu z wykresem z ogromnym wysiłkiem przenikamy jego sekretne znaczenie.”

Spotykamy się z różnymi problemami. Począwszy od trudności przedstawienia graficznego funkcji, której wzór jest znany i nawet niezbyt skomplikowany, ale nigdy nie widzieliśmy ani nie sporządzaliśmy jej wykresu, aż do podania własnego przykładu ilustrującego daną teorię. Wykres wykonany za pomocą komputera w wielu przypadkach będzie miał przewagę nad tym sporządzonym ręcznie. Wykres komputerowy jest zwykle dokładniejszy, a także możliwy do wykonania, gdy wzór funkcji jest bardzo skomplikowany. Prowadzący zajęcia sam odkrywa korzyści, które płyną z analizowania wykresu, w szczególności, gdy jest on sporządzony osobiście przez studenta rozwiązującego problem. Ponadto, jak wynika z badań (Duda, 2009), sporządzanie wykresów na kalkulatorze graficznym i odczytywanie ich przez ucznia może stać się źródłem inspiracji do stawiania pewnych hipotez matematycznych i jednocześnie weryfikowania ich.

Problem I

Wykres komputerowy jako pomoc w zrozumieniu zagadnień w pracach magisterskich

Pisanie prac magisterskich stawia studenta w sytuacji wejścia w nieznany wycinek danej dziedziny. Student w określonym czasie zapoznaje się z pojęciami (definicjami, twierdzeniami i dowodami tych twierdzeń), co pozwala „poruszać się” po tym materiale.

Jednak problem stanowi konstrukcja własnego przykładu ilustrującego daną teorię lub twierdzenie. Bez podania nieraz prostego przykładu rodzą się wątpliwości, czy aby materiał ów jest zrozumiany właściwie przez studenta. Skąd to się bierze? Jedną z ważnych przyczyn jest brak ćwiczeń z zakresu materiału opracowanego przez studenta. Nieraz brak na to czasu. Prawdopodobnie, również niektórzy studenci mają trudności z przeprowadzeniem samodzielnie takich ćwiczeń lub uważają je za niepotrzebne.
O „mocowaniu się” uczących się matematyki i już dojrzałych matematyków z nowymi problemami tak pisze Sawyer (1988) w *Matematyce nauką przyjemną* (s. 156–157):

„Wykresy mogą być bardzo pomocne przy uczeniu się matematyki. Wiele osób potrafi wykonać wszystkie operacje prowadzące do rozwiązania zadania, gdy im się pokaże to rozwiązanie, ale same nie umieją wpaść na to rozwiązanie. Rozumieją każdy poszczególny krok, ale nie wiedzą, jaki ciąg kroków należy zastosować. Tę trudność można pokonać tylko wtedy, gdy uczy się widzieć znaczenie wzorów matematycznych. Wielu matematyków myśli o swoich problemach przez cały dzień, bez względu na to, gdzie się znajdują. Nie pamiętają oni wszystkich wzorów; pamiętają obraz, jaki problem stworzył w ich umyśle. Myślą ustawicznie o tym obrazie, dopóki nie wpadnie im do głowy metoda rozwiązania problemu (...) Wykresy są jednym ze sposobów tworzenia obrazu problemu.”

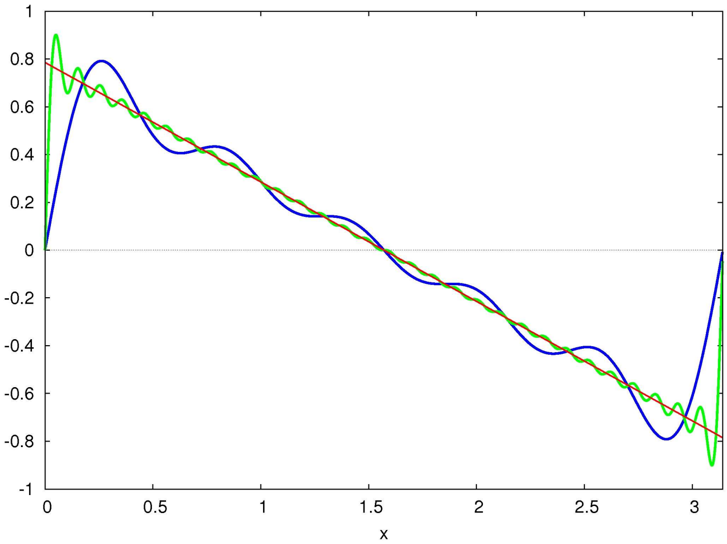
W każdym z przypadków przykłady zamieszczone w pracach mogły kończyć się na obliczeniach. Zazwyczaj sporządzenie wykresu komputerowego było poprzedzone żmudnymi obliczeniami. Wykresy do tych przykładów miały spełniać rolę niejako dodatkową, miały one „upiększyć” te prace. Taki był zamiar początkowy. Jaką więc rolę odegrały wykresy dołączone do obliczeń?
Podamy niżej przykłady ilustrujące pewne zagadnienia matematyczne, które uzupełniono wykresem komputerowym. Przykłady te wybrane są z prac magisterskich magistrantów autorki (studia dzienne i zaoczne, kierunek *matematyka*, specjalność nauczycielska). Będziemy odwoływać się tu tylko do niezbędnego minimum pojęć matematycznych, koniecznego do wyjaśnienia przykładów.

A. Szeregi Fouriera stanowią wdzięczną tematykę, jeśli chodzi o sporządzanie wykresów. Mamy tutaj do czynienia ze sporządzaniem wykresów sum częściowych S_n ($S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$) szeregu Fouriera funkcji f składających się z dużej liczby składników funkcyjnych. Takich sum trzeba wykreślić nieraz wiele, aby móc zilustrować twierdzenia o ich zbieżności do funkcji granicznej. Przedtem należy wykonać obliczenia współczynników a_0, a_k i b_k (dla $k = 1, 2, \ldots$) szeregu Fouriera (Fichtenholz, 1985, t. 3, s. 358–359).

Cornu (1986), który zajmował się pojęciem granicy, pisze o wizualizacji w przypadku przybliżania krzywych szeregami Taylora. Takich prób, uczeń czy student może wykonać wiele, często pod kontrolą nauczyciela.
Piszący pracę magisterską, ćwiczenia te wykonać musi sam, żeby potem coś wybrać ze sporządzonych wykresów, aby ta wizualizacja była jak najlepsza. Wie również o tym, że to co robi musi się udać. Wykres ma być zakończeniem przykładu. Dla dwóch lub trzech wybranych n można zilustrować za pomocą sum częściowych twierdzenia o zbieżności szeregów Fouriera.
Na rysunku 1. przedstawiono wykres funkcji f zadanej wzorem $f(x) = \frac{\pi - 2x}{4}$ oraz wykresy sum częściowych S_5 (linia ciemniejsza) i S_{30} (linia jaśniejsza) jej rozwinięcia w szereg Fouriera dla $x \in (0, \pi)$.
Studentka wykreślając sumy częściowe o niskich indeksach i porównując te wykresy z wykresami sum częściowych dla innych funkcji ma wrażenie, że popełniła błąd w obliczeniach. Jest to przykład sytuacji, gdy sumy częściowe o niskich (jednocyfrowych) indeksach odbiegają mocno od funkcji f. Zbieżność znacznie lepiej ilustrują sumy częściowe o wyższych indeksach.

W pobliżu punktów nieciągłości (punktów skoku) funkcji f można zauważyć nadmierny „wyskok" sum częściowych. Sytuacja ta nosi nazwę efektu Gibbsa (Fichtenholz, 1985, t. 3, s. 417). Można te odchylenia samodzielnie zmierzyć i porównać z oszacowaniem na podstawie wzoru podanego w literaturze.
Przykład takich „wyskoków" sum wyraxnie widać w otoczeniu punktów $x = 0$ oraz $x = \pi$ na rysunku 1.
Student dokonał pomiaru wielkości tych „wyskoków" na wykresach S_n, które sporządził dla wybranej przez siebie funkcji f. 0trzymał wyniki bardzo zbliżone do podanych za pomocą wzoru.

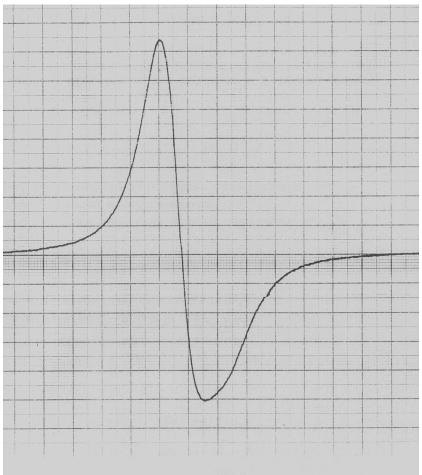
Natomiast, gdy sporządza się wykresy sum Fejéra σ_n dla tej samej funkcji ($\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$), wtedy efekt Gibbsa w punktach nieciągłości już nie występuje. Sytuację tę opisuje twierdzenie w Fichtenholz (1985, t. 3, s. 517).
Można to zobaczyć, gdy przyjmuje się w szczególności te same indeksy dla sum σ_n, co w przypadku sum częściowych S_n. Również tę sytuację student odczytuje z wykresów sporządzonych przez siebie.



Rysunek 1. Wykres pochodzi z pracy magisterskiej Haliny Spis *Zupełność układu trygonometrycznego. Operacje na szeregach* (UZ, 2002); na potrzeby publikacji jest sporządzony ponownie przez Piotra Szczepaniaka.

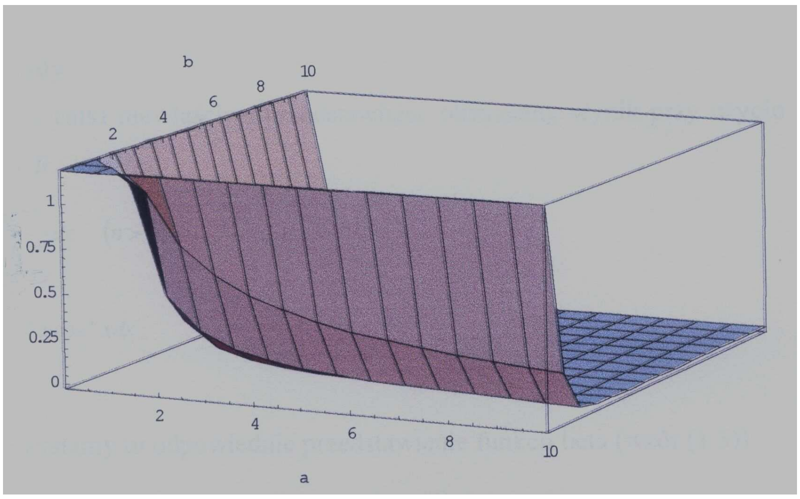
Jeszcze innym przykładem, związanym z szeregami jest wyznaczanie funkcji y jako funkcji x w postaci szeregu potęgowego z równania $F(x, y) = 0$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0), przy czym F jest analityczna w tym punkcie. Dla wyznaczenia współczynników rozwinięcia funkcji y wykonuje się szereg obliczeń (Fichtenholz, 1985, t. 2, s. 430). Potem wykreślając $F(x, y) = 0$ oraz funkcję y można zaobserwować, jak wygląda to w otoczeniu punktu (x_0, y_0). Z powodu żmudnych obliczeń, studentka wyznaczyła tylko trzy początkowe współczynniki szeregu funkcji y. Z wykresu odczytała, że już to przybliżenie ładnie ilustruje twierdzenie. Bardzo blisko punktu (x_0, y_0) wykresy tych funkcji prawie pokrywają się.

B. Obserwacja przez studenta badań prowadzonych przez fizyków w pracowni fizycznej.
Pisząc pracę magisterską dotyczącą zastosowania szeregów Fouriera w fizyce, student obserwuje przebieg badania standardowej próbki chemicznej za pomocą spektrometru (EPR) (więcej informacji w Kęcki, 1998).
Student kierunku *matematyka* specjalności nauczycielskiej po raz pierwszy miał okazję przyjrzeć się, jak wyglądają badania profesjonalne w pracowni fizycznej. Wydruki uzyskane w trakcie badania są odpowiednio interpretowane przez fizyków.
Na rysunku 2. przedstawiono wydruk uzyskany w trakcie badania. Jest to wykres krzywej obrazującej sygnał EPR (zależność pierwszej pochodnej absorpcji od natężenia magnetycznego) dla próbki DPPH.



Rysunek 2. Rysunek pochodzi z pracy magisterskiej Roberta Kędzi *Zastosowanie szeregów Fouriera do pewnych zagadnień fizyki* (WSP Zielona Góra, 2001).

C. Przykładem wykorzystania wykresu komputerowego do ilustracji funkcji dwóch zmiennych może być sporządzenie wykresu funkcji beta.
Na rysunku 3. przedstawiono wykres funkcji beta (całka Eulera pierwszego rodzaju) $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ dla parametrów $a, b \in (0, 10)$.
Studentka nie spotkała wykresu funkcji beta w literaturze. Sporządzenie wykresu miało tu na celu zaspokojenie ciekawości, jak wykres tej funkcji wygląda (dla parametrów jak wyżej) oraz wzbogacenie strony estetycznej pracy.



Rysunek 3. Rysunek pochodzi z pracy magisterskiej Izabeli Stafińskiej *Funkcja beta, jej podstawowe własności i zastosowania* (UZ, 2003).

Jeszcze innym przykładem może być ilustracja zagadnienia przedłużania funkcji dwóch (również jednej) zmiennej. Funkcję przedłużoną wyznacza się wykonując wiele obliczeń. (Zagadnienie przedłużania funkcji można znaleźć w Fichtenholz, 1985, t. 1, s. 487–497.) Student, wykonując wykresy do własnych przykładów funkcji f oraz obliczonych funkcji przedłużonych, może zaobserwować, jak zachowują się funkcje przedłużone na zewnątrz obszaru określoności funkcji f (zgodnie z twierdzeniem – funkcje przedłużone zachowują klasę C^n funkcji f).

Problem II

W przypadku ilustracji zadań rozwiązywanych na bieżąco na ćwiczeniach, idealną sytuacją byłaby możliwość przeprowadzenia części zajęć w pracowni komputerowej. Jeśli osoba prowadząca zajęcia z przedmiotów informatycznych godzi się na współpracę z prowadzącym zajęcia z matematyki, wtedy możemy liczyć, że wykresy do zadań zaproponowanych przez nas będą sporządzone. Można też poprosić kilku studentów o przygotowanie takich wykresów, a nieraz i do tego krótkich referatów w domu i zaprezentowanie ich grupie. Taka sytuacja w praktyce autorki występowała na kierunkach studiów niematematycznych. Pozostali studenci z wielkim zainteresowaniem śledzili wykresy, sprawdzając przy tym poprzednio wykonane obliczenia.
Wykresy przygotowali wybrani studenci. Sytuacja ta była analogiczna do opisanej przez Sawyera w *Myślenie obrazowe w matematyce elementarnej* (1988, s. 140):

„W klasie mogą się znaleźć uczniowie uparci lub entuzjaści, dla których pewien stopień trudności stanowi wyzwanie. Może właśnie oni narysują bardziej pracochłonne wykresy i zademonstrują wyniki reszcie uczniów. Takie postępowanie odpowiada potrzebom nowoczesnego społeczeństwa."

Jako przykład może posłużyć sporządzenie wykresu funkcji f z parametrami określonej wzorem: $f(x) = ax\frac{x-c}{x+b}$, gdzie $a, b, c > 0,\ x \geq c$ (semestr I, kierunek niematematyczny).
Funkcję tę wykorzystują studenci tego kierunku na innym przedmiocie.
Przeprowadzono badanie tej funkcji na tablicy i porównano szkic jej wykresu z wykresem komputerowym (dla tych samych wartości parametrów) sporządzonych przez wybranego studenta. Zmieniając wartości parametrów a, b, c, można prześledzić zachowanie się funkcji na odpoweidnich wykresach komputerowych.

Problem III

Wykrywanie i możliwość eliminacji błędów

W przypadku badania funkcji (mających zastosowanie w innych dziedzinach wiedzy) na ćwiczeniach z matematyki na kierunku niematematycznym, w rachunkach występowały błędy (znaki w pierwszej i drugiej pochodnej), co miało znaczny wpływ na przebieg tych funkcji. Dzięki przedstawieniu wykresów komputerowych można było szybko te błędy wykryć. Również przy konstrukcji przykładów do prac magisterskich, błędne obliczenie współczynników szeregów Fouriera (a_0, a_k i b_k dla $k = 1, 2, \ldots$) dla funkcji f było powodem, że na wykresach pojawiały się sumy częściowe szeregu Fouriera, które mocno odbiegały od zadanej funkcji f. Z twierdzeń o zbieżności szeregów Fouriera wynikało coś innego. Wtedy łatwo było wykryć błąd powstały ze złych obliczeń współczynników. Podobnie, w przypadku wyznaczania funkcji y w postaci szeregu, jak i konstruowania funkcji przedłużonych jednej i dwóch zmiennych, każda pomyłka w rachunkach „widoczna" była na wykresach.

Wnioski końcowe

W każdym z omówionych przypadków dało się zauważyć dużą potrzebę sporządzenia wykresu, a zwłaszcza wykresu komputerowego. Niejednokrotnie dało to właściwe „ujrzenie" problemu i upewnienie się co do prawidłowego rozumowania studenta. Wykres komputerowy umożliwił wykrycie błędów rachunkowych. Nadało to pracom elegantszą formę, a także zajęcie się „na trochę" problemem informatycznym i zdystansowaniem się do rozważanych zagadnień (poszerzenie spojrzenia na matematykę). Spośród korzyści płynących ze stosowania kalkulatora (komputera) w nauczaniu matematyki, o których pisze Cornu (1986), wymienimy takie, jak: niezależność ucznia od nauczyciela (tempo pracy), „decentralizację" – uczeń nie jest ostatnim aktorem, część akcji jest przeniesiona na maszynę, wreszcie konieczność wyrażania się przez ucznia bardzo ściśle , bo w zależności od tego działa maszyna. Korzyści te w naszym przypadku były również widoczne. Podczas, gdy studenci różnych niematematycznych kierunków studiów referowali na ćwiczeniach z matematyki zadania, do których dołączony był wykres, pozostali koledzy ze skupieniem i w ciszy odbierali treści im przekazywane. Wykresy sporządzone były w różnych programach matematycznych. W przypadku prac magisterskich wykresy na początku sprawiały trudności. Wielu z magistrantów zasięgało konsultacji w tym zakresie. Z badań ankietowych odnośnie wykorzystania komputerów przy sporządzaniu wykresów i na zajęciach z analizy matematycznej na kierunku *matematyka* specjalności nauczycielskiej wynika, że jest różnie w poszczególnych uniwersytetach, ale ogólnie rzecz biorąc nie jest zbyt dobrze (pisze o tym Zarzycki, 2008).

Mimo trudności przy sporządzaniu wykresów, były one dla studentów bardzo ważne i cieszyły ich. Ważność tę należy rozumieć tu jako nowe doświadczenie polegające na skorzystaniu z wykresu komputerowego przy rozwiązywaniu zadania matematycznego. W przypadku magistrantów kierunku nauczycielskiego mających zamiar podjąć pracę w szkole, stanowiło to ponadto zachętę do korzystania z pomocy dydaktycznej jaką jest komputer w nauczaniu matematyki. Wykresy wykonano w większości w kolorach. Nieprzeceniona jest jednak ich pomoc w lepszym zrozumieniu teorii matematycznych, zgłębieniu ich i utrwaleniu.

Literatura

[1] Cornu B.: 1986; *Rola kalkulatorów w nauczaniu „matematyki dla wszystkich”*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 6, s. 83–102.

[2] Duda J.: 2009; *Twórczość matematyczna uczniów uzdolnionych a kalkulator graficzny* (*fragment badań*), Annales of the Polish Mathematical Society, 5th Series, Didactica Mathematicae 32, s. 43–92.

[3] Fichtenholz M. G.: 1985; *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 1, 2, 3, PWN, Warszawa.

[4] Kęcki Z.: 1998; *Podstawy spektroskopii molekularnej*, PWN, Warszawa.

[5] Sawyer W. W.; 1988; *Matematyka nauką przyjemną*, Wiedza Powszechna (seria Ω), Warszawa.

[6] Sawyer W. W.: 1988; *Myślenie obrazowe w matematyce elementarnej*, Wiedza Powszechna (seria Ω), Warszawa.

[7] Sawyer W. W.: 1988; *W poszukiwaniu modelu matematycznego*, Wiedza Powszechna (seria Ω), Warszawa.

[8] Zarzycki P.: 2008; *Kształcenie przyszłych nauczycieli matematyki pod kątem używania technologii informacyjnej – stan obecny, perspektywy i zagrożenia*, Annales of the Polish Mathematical Society, 5th Series, Didactica Mathematicae 31, s. 67–95.

Autorka pracuje w Uniwersytecie Zielonogórskim