Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Joanna Major, Zbigniew Powązka (Kraków)

Z badań nad kształtowaniem się u studentów matematyki pewnych aspektów matematycznej aktywności

Wstęp

Jednym z ważnych komponentów studiowania matematyki jest aktywna postawa osób biorących w nim udział. Z. Krygowska (1977) w następujący sposób charakteryzuje ten proces: *uczenie się matematyki jest zorganizowaną aktywnością obejmującą:*

1) *przejmowanie i asymilowanie informacji otrzymywanych z różnych źródeł,*
2) *bezpośrednie wykorzystywanie tych informacji dla:*
   a) *rozwiązywania standardowych zadań mających charakter ćwiczebny,*
   b) *samodzielnego zdobywania nowych informacji,*
3) *tworzenie subiektywnie nowych dla uczącego się elementów wiedzy, subiektywnie nowych pojęć, twierdzeń i metod w toku rozwiązywania problemów sformułowanych przez innych lub samego uczącego się.*

Wśród różnych aspektów aktywności zwraca się uwagę na umiejętność odkrywania i formułowania twierdzeń oraz przedłużania i uogólniania zadań oraz problemów.

W niniejszej pracy interesować nas będzie proces rozwiązywania zadania w fazie refleksji nad otrzymanym rozwiązaniem. Prowadzenie tego typu rozważań uważamy za ważne, bowiem stwarza ono okazję do rozwijania twórczości matematycznej. Omawiana dyskusja nad rozwiązaniem zadań realizuje zalecenie G. Polyi dotyczące „rzutu oka wstecz" (Polya, 1993).

Proponowanie uczącym się odpowiednio dobranego materiału zadaniowego może przyczynić się do samodzielnego odkrycia przez uczących się nieznanego im twierdzenia sugerowanego przez zadanie albo znalezienia nowej prawidłowości, która na pierwszy rzut oka nie jest widoczna w zadaniu.

Świadomie odróżniamy tu terminy „odkrywanie" twierdzenia i jego „znalezienie". Jest tak dlatego, że podzielamy pogląd Z. Krygowskiej (1977), iż do odkrycia twierdzenia podczas rozwiązywania zadań może dojść w jednej z czterech poniższych sytuacji:

> *W pierwszej uczeń odkrywa twierdzenie, rozwiązując zadanie dane mu a priori . . . W sytuacji drugiej uczeń rozwiązuje dane mu, ale bardziej otwarte zadanie, w którym wyraźnie widać już, że chodzi o wykrycie i dowód nowego twierdzenia . . . W sytuacji trzeciej uczeń sam zadaje takie pytania i sam lub przy pomocy nauczyciela szuka na nie odpowiedzi . . . Wreszcie może się zdarzyć i zdarza się, że uczeń formułuje twierdzenie w postaci hipotezy wyrażając w ten sposób spostrzeżenie na przykład pewnej regularności obserwowanej w poszczególnych przypadkach lub intuicyjnie oczywistej relacji. Pytanie dotyczy wtedy ogólnej „prawdziwości" tego co zauważono.*

W pracy z 2009 roku (Major, Powązka 2009) podaliśmy kilka przykładów zadań stereometrycznych, w których refleksja nad otrzymanym rozwiązaniem prowadzi do sformułowania subiektywnie nowych dla uczących się twierdzeń matematycznych. Omawiane tam zadania nie pozwalają na realizację w pełni żadnej z sytuacji opisanych powyżej. W wyniku refleksji nad rozwiązaniami zadań formułuje się twierdzenia o pewnych obiektach matematycznych, ale istotny jest tu fakt, że pytania matematyczne (polecenia) zawarte w treści zadań dotyczą innych obiektów niż te, o których mowa w twierdzeniach. Na przykład zadanie dotyczy wyznaczenia objętości prostopadłościanu, podczas gdy formułowane twierdzenie dotyczy zależności pomiędzy miarami kątów, jakie przekątna prostopadłościanu tworzy z jego krawędziami (por. np. rozwiązanie zadania 1 w paragrafie 1.3). To z tego powodu posłużyliśmy się terminem „znaleźć". W Małym Słowniku języka polskiego (1969) czytamy *znaleźć* . . . 1. *odnaleźć*, 2. *odszukać kogoś lub coś schowanego*, . . . 3. *natrafić na coś*, 4. *stwierdzić występowanie czegoś*. . .

W świetle powyższych uwag użycie przez nas tego terminu do opisanych poniżej sytuacji wydaje się być zasadne.

1. Zagadnienia metodologiczne pracy

W tej części pracy sformułujemy cele badań i opiszemy ich organizację. Scharakteryzujemy też uczestniczące w nich osoby oraz zaprezentujemy narzędzia badawcze.

1.1. Cele badań

Zauważmy, że bezpieczne poruszanie się w otaczającym nas świecie wymaga właściwej oceny relacji zachodzących między elementami przestrzeni co najmniej trójwymiarowej, w której przychodzi nam żyć. Umiejętności te można zdobyć na przykład podczas rozważania problemów stereometrycznych, które często wiążą ze sobą wiedzę geometryczną z trygonometrią.

W obecnym programie szkoły ponadgimnazjalnej zakłada się dość ubogą znajomość trygonometrii. Okazuje się jednak, że nawet przy tak okrojonym materiale można znaleźć bardzo interesujące problemy pozwalające na twórczą działalność uczących się matematyki. Odpowiedni materiał zadaniowy, nieprzekraczający możliwości intelektualnych uczących się, może stwarzać okazje do znalezienia, przez osoby rozwiązujące zadania, subiektywnie nowych twierdzeń (por. Major, Powązka, 2009).

Celem opisywanych badań było uzyskanie choćby częściowej odpowiedzi na następujące pytanie: **Czy i jakie twierdzenia matematyczne są w stanie znaleźć i sformułować studenci w procesie refleksji nad uzyskanym rozwiązaniem odpowiednio skonstruowanego zadania?**

Wydaje się, że obecnie w nauczaniu matematyki na różnych poziomach edukacji nie poświęca się zbyt wiele czasu na taką refleksję, a przecież odgrywa ona ważną rolę w rozwijaniu twórczej aktywności tak uczniów, jak i studentów.

Analizując zebrany materiał badawczy podejmujemy więc próbę określenia umiejętności studentów w znajdowaniu różnych prawidłowości pojawiających się podczas rozwiązywania zadań matematycznych i formułowaniu tych prawidłowości w postaci pewnych stwierdzeń. Zwracamy też uwagę na błędy popełniane przez respondentów.

Uzyskane wyniki obserwacji mogą być pomocne w ocenie różnych aspektów matematycznej aktywności osób poddanych badaniom, które mają być przyszłymi nauczycielami.

1.2. Grupa badawcza, organizacja badań

Badania zostały przeprowadzone w semestrze letnim roku akademickiego 2009/2010 na czterech rocznikach nauczycielskich matematycznych studiów dziennych w Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie. Uczestniczyło w nich łącznie 141 osób. W tabeli 1 podano liczby studentów z poszczególnych roczników biorących dobrowolnie udział w badaniach.

Lp.	Rok studiów	Liczba studentów
1	I rok	66
2	II rok	20
3	III rok	28
4	V rok	27
	Razem	141

Tabela 1. Liczba studentów uczestniczących w badaniach.

Badania na roku II zostały potraktowane jako badania pilotażowe. Testowano w nich opracowany kwestionariusz badań pod względem jego przydatności do realizacji celów zamierzonych badań. Na podstawie analizy uzyskanych odpowiedzi zmieniona została redakcja niektórych fragmentów kwestionariusza w części wstępnej, zawierającej niezbędne definicje i twierdzenia oraz rozbudowano sformułowanie zadania 1 (por. Aneks).

Do badań właściwych wybrano roczniki: pierwszy, trzeci i piąty. Wybór tych roczników nie był przypadkowy.

Studenci roku pierwszego mogli posiadać stosunkowo duże umiejętności rozwiązywania zadań stereometrycznych, z uwagi na niedawne zdawanie egzaminu maturalnego. Studenci roku trzeciego kończyli etap edukacji na poziomie licencjatu uzyskując prawo nauczania matematyki w szkołach podstawowych i gimnazjach. Powinni więc posiadać pewne umiejętności w zakresie dostrzegania analogii i formułowania wniosków inspirowanych rozwiązaniem zadania matematycznego. Studenci roku piątego byli przedstawicielami ostatniego rocznika, który w naszym Uniwersytecie kończył jednolite, pięcioletnie studia magisterskie. Studenci ci mieli okazję do zapoznania się z wieloma działami matematyki, a w ramach zajęć z dydaktyki matematyki poznawali specyfikę „matematyki szkolnej". Należało przypuszczać, że powinni oni być możliwie najlepiej, ze wszystkich badanych, przygotowani do twórczej pracy.

W czasie badań studenci udzielali pisemnych odpowiedzi na pytania kwestionariusza badań. Pod treścią każdego z zadań było wydzielone miejsce na jego rozwiązanie. Respondenci pracowali przez 60 minut w obecności osób prowadzących badania. Czas trwania badań mógł zostać (na życzenie studentów) przedłużony. Studenci z tego przywileju nie skorzystali.

1.3. Narzędzie badawcze

Jak już wspominano, w Aneksie zamieszczony został kwestionariusz wykorzystany w badaniach. W pierwszej jego części znalazły się informacje teoretyczne przydatne do rozwiązania zadań. Były to: twierdzenie o objętości prostopadłościanu i ostrosłupa prostego, twierdzenie o długości przekątnej prostopadłościanu oraz twierdzenie sinusów. Zamieściliśmy je dlatego, aby brak znajomości elementarnych treści geometrycznych nie wpłynął negatywnie na wyniki badań.

Twierdzenie sinusów nie było bezpośrednio potrzebne w rozwiązaniu żadnego z zadań, ale miało stanowić podpowiedź do znalezienia twierdzenia 1(ii).

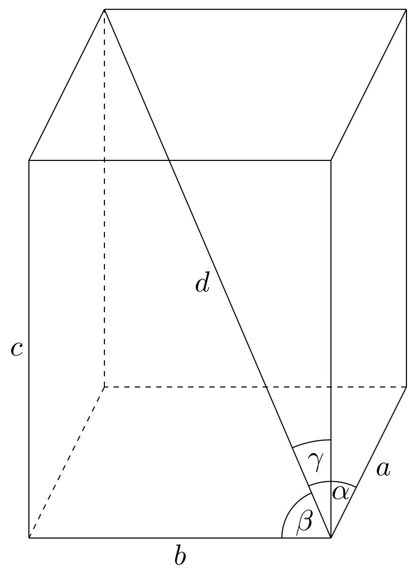
W części drugiej kwestionariusza znalazły się trzy zadania dotyczące objętości prostopadłościanu oraz ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Każde z nich zostało rozszerzone o polecenia mające na celu zainspirowanie studentów do refleksji nad uzyskanym w części a) rozwiązaniem. Zadanie 1a) dotyczyło obliczenia objętości prostopadłościanu o przekątnej długość d i danej mierze kątów, jakie ta przekątna tworzy z krawędziami prostopadłościanu wychodzącymi ze wspólnego wierzchołka.

W rozwiązaniu tego zadania, przyjmując że a, b, c oznaczają długości krawędzi prostopadłościanu, zaś α, β, γ miary kątów, jakie przekątna d tworzy z odpowiednimi krawędziami (zob. rysunek 1), dostajemy następujące równości:

$$a = d\cos\alpha, \quad b = d\cos\beta, \quad c = d\cos\gamma.$$

Stąd i z twierdzenia o objętości prostopadłościanu wynika, że

$$V = d^3 \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$



Rysunek 1.

Oczekiwaliśmy, że refleksja nad rozwiązaniem tego zadania doprowadzi do sformułowania następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 1. *Niech α, β, γ będą miarami kątów, jakie przekątna prostopadłościanu tworzy z krawędziami wychodzącymi z jednego wierzchołka.*

(i) *Wtedy zachodzi równość*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

(ii) *Iloraz długości krawędzi prostopadłościanu i cosinusa kąta przyległego do tej krawędzi jest równy długości przekątnej prostopadłościanu, tzn.*

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{a}{\cos\gamma} = d.$$

Zauważmy, że przekątna prostopadłościanu jest średnicą kuli na nim opisanej. Zatem twierdzenie 1(ii) jest w swym kształcie podobne do twierdzenia sinusów zawartego w części teoretycznej kwestionariusza.

Znalezieniu powyższych prawidłowości miały pomóc części b) i d) zadania 1. Natomiast w rozwiązaniu części c) zadania 1 można było zastosować twierdzenie 1(i). Ponieważ $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $3(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \neq 1$, więc nie istnieje prostopadłościan, w którym przekątna tworzy z każdą z krawędzi kąt o mierze $\frac{\pi}{4}$.

Przeprowadzenie tego rozumowania wymagało jednak znalezienia i poprawnego zastosowania następującego twierdzenia wynikającego bezpośrednio z rozwiązania części 1a) zadania.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli α, β, γ są miarami kątów, jakie przekątna prostopadłościanu o długości d tworzy z odpowiednimi krawędziami a, b, c wychodzącymi z jednego wierzchołka* (rysunek 1), *to zachodzą zależności:*

$$a = d\cos\alpha, \quad b = d\cos\beta, \quad c = d\cos\gamma.$$

Odnotujmy w tym miejscu, że twierdzenie 1(i) można interpretować w jeszcze inny sposób. Załóżmy, że w jednym z wierzchołków podstawy dolnej prostopadłościanu umieszczamy prostokątny układ współrzędnych, w którego osiach zawierają się krawędzie prostopadłościanu. Na przekątnej prostopadłościanu wychodzącej z tego wierzchołka umieszczamy dowolny niezerowy wektor $\overrightarrow{v}$. Wtedy zapisana w twierdzeniu 1(i) równość jest własnością cosinusów kierunkowych tego wektora. Interpretacja ta jest pomocna w rozwiązaniu części 1e) zadania. Wiadomo, że rzutem prostokątnym prostopadłościanu na płaszczyznę podstawy jest prostokąt, będący podstawą tego prostopadłościanu, zaś rzutem przekątnej prostopadłościanu jest przekątna tego prostokąta. Pozostając przy interpretacji wektorowej, przyjmijmy we wzorze z twierdzenia 1: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (w geometrii przyjmuje się, że wektor zerowy – rzut wysokości prostopadłościanu na płaszczyznę podstawy – jest prostopadły do tej płaszczyzny) otrzymujemy równość

$$\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1,$$

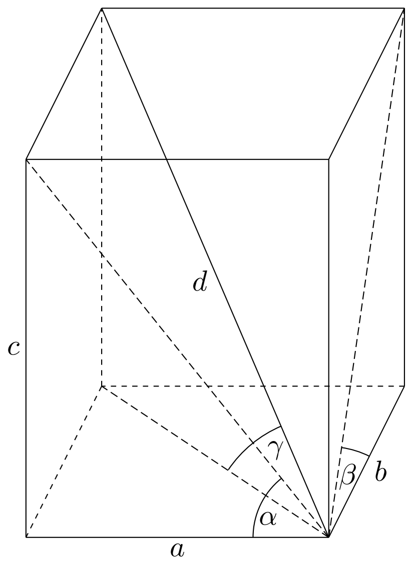
skąd na mocy wzorów redukcyjnych

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Otrzymaliśmy zatem tzw. „jedynkę trygonometryczną”.

Dla opisu rozwiązania zadania 2a) przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku 2.

Niech a, b, c oznaczają długości krawędzi prostopadłościanu, zaś d długość jego przekątnej. Niech α oraz β oznaczają miary kątów, jakie przekątne ścian bocznych tworzą odpowiednio z krawędziami a oraz b, zaś γ miarę kąta, jaki przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy (zob. rysunek 2).



Rysunek 2.

Zachodzą wtedy równości:

$$c = d \sin\gamma, \quad a = c \operatorname{ctg}\alpha = d \sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha, \quad b = c \operatorname{ctg}\beta = d \sin\gamma \operatorname{ctg}\beta.$$

Zatem objętość prostopadłościanu wyraża się wzorem

$$V = d^3 \sin^3\gamma \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

Dla rozwiązania zadania 2b) wystarczy skorzystać z wzorów na długości krawędzi wyprowadzonych w rozwiązaniu zadania 2a) oraz z wzoru na kwadrat długości przekątnej prostopadłościanu. Dostajemy wtedy:

$$d^2 = d^2 \sin^2\gamma \operatorname{ctg}^2\alpha + d^2 \sin^2\gamma \operatorname{ctg}^2\beta + d^2 \sin^2\gamma.$$

Stąd po podzieleniu przez d^2 mamy

$$1 = \sin^2\gamma \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\gamma \operatorname{ctg}^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Odejmując od obu stron tej równości $\sin^2\gamma$ i korzystając z „jedynki trygonometrycznej" dostajemy równość

$$\cos^2\gamma = \sin^2\gamma \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\gamma \operatorname{ctg}^2\beta.$$

Dzieląc tę równość przez $\sin^2\gamma$ zachodzi

$$\operatorname{ctg}^2\gamma = \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta.$$

W wyniku rozwiązania zadania 2a) i refleksji nad uzyskanymi w nim zależnościami udowodniliśmy następujące twierdzenie (Major, Powązka, 2009).

Twierdzenie 3. *Jeżeli α, β są miarami kątów, jakie przekątne ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą z płaszczyzną podstawy i γ jest miarą kąta nachylenia przekątnej prostopadłościanu do tej płaszczyzny, to zachodzi równość*

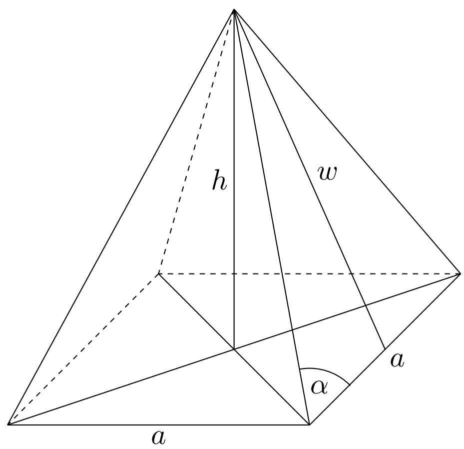
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta = \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

Znalezione twierdzenie 3 można wykorzystać w rozwiązaniu zadania 2c). Z własności sześcianu wynika, że kąty α i β mają miarę $\frac{\pi}{4}$, zatem na mocy twierdzenia 3 zachodzi

$$2 = 2\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}^2 \gamma,$$

skąd wobec faktu, że γ jest kątem ostrym, wynika $\operatorname{ctg} \gamma = \sqrt{2}$. Ponieważ funkcja cotangens jest malejąca w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, więc kąt nachylenia przekątnej sześcianu do jego podstawy ma miarę mniejszą od $\frac{\pi}{4}$.

Trzecie zadanie kwestionariusza badań dotyczyło własności ostrosłupów. W części 3a) tego zadania poszukuje się objętości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, znając długość a krawędzi podstawy oraz miarę kąta α, jaki krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z krawędzią podstawy (por. rysunek 3).



Rysunek 3.

Oznaczmy przez w długość wysokości ściany bocznej ostrosłupa, a przez h długość jego wysokości. Wtedy: $w = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego wyznaczonego przez wysokość h ostrosłupa, wysokość w ściany bocznej i odcinek przystający do połowy krawędzi podstawy dostajemy:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)^2.$$

Stąd

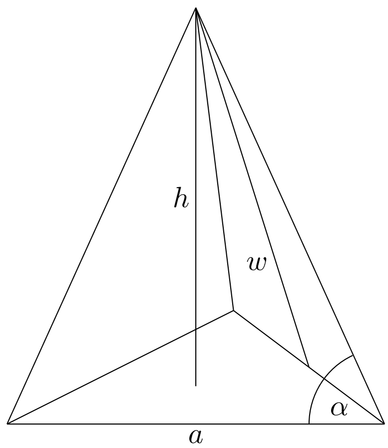
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

Zatem objętość ostrosłupa wyraża się wzorem

$$V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}.$$

To rozwiązanie wymaga założenia dodatniości wyrażenia pod pierwiastkiem. Wynika z niego, że kąt α winien mieć miarę taką, by $\operatorname{tg}^2\alpha - 1 > 0$. Ponieważ z warunków zadania kąt α jest ostry, więc nierówność ta jest równoważna nierówności $\operatorname{tg}\alpha > 1$, czyli $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (por. Major, Powązka 2010). Znalezienie dopuszczalnych wartości kąta α było celem polecenia 3b).

W zadaniu 3c) należało powtórzyć rozumowania z części 3a) i 3b) dla ostrosłupa prawidłowego trójkątnego (zob. rysunek 4).



Rysunek 4.

Oznaczając przez a długość krawędzi podstawy, przez α miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy oraz przez h długość wysokości ostrosłupa, a przez w długość wysokości ściany bocznej, dostajemy $w = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Rozumując jak w rozwiązaniu części 3a) i korzystając z faktu, że odcinek łączący spodek wysokości ostrosłupa z środkiem krawędzi podstawy jest trzecią częścią wysokości trójkąta równobocznego będącego podstawą ostrosłupa, dostajemy:

$$V = \frac{a^3}{24}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{3}}.$$

Warunkiem istnienia rozwiązania jest, by $\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} > 0$, czyli $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

Celem zamieszczenia zadania 3 w kwestionariuszu było rozstrzygnięcie, czy badani studenci potrafią znaleźć i sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Niech α będzie kątem, jaki krawędź boczna prawidłowego ostrosłupa prostego tworzy z krawędzią podstawy.*

a) *Jeżeli podstawą ostrosłupa jest kwadrat, to* $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

b) *Jeżeli podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, to* $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

2. Analiza wyników badań

W niniejszym paragrafie przedstawimy analizę uzyskanych wyników badań ze szczególnym uwzględnieniem uwag dotyczących kształtowania się u studentów różnych aspektów matematycznej aktywności. Obok poszukiwania odpowiedzi na pytanie badawcze sformułowane w paragrafie 1.1, zwrócimy uwagę na inne elementy tej aktywności (por. Krygowska, 1986).

Wyniki ilościowe dla każdej grupy badanych zamieszczone zostały w tabelach 2–5. Podane liczby oznaczają liczbę uzyskanych odpowiedzi w badanej grupie studentów. W kolumnie „częściowe" podano liczbę rozwiązań, których autorzy poprawnie wypisywali zależności między elementami prostopadłościanu lub ostrosłupa, rozpoczęli rachunki, w których nie popełnili żadnych błędów albo sporządzili poprawny rysunek.

Omówienie rozpoczynamy od prac studentów roku drugiego, którzy, jak wspominaliśmy wcześniej, stanowili grupę pilotażową.

2.1. Analiza odpowiedzi studentów roku drugiego

Wyniki badań uzyskane w tej grupie prezentujemy w Tabeli 2. Analizując dane należy stwierdzić, że zadania 1a), 2a) i 3a) znajdowały się w sferze możliwości studentów, bowiem każdy z badanych podjął próbę ich rozwiązywania. Jednak podczas tej działalności wystąpiły różnego rodzaju trudności. Liczby poprawnych rozwiązań w tych zadaniach są porównywalne: 25% rozwiązań w zadaniu 1a) i 20% rozwiązań w zadaniach 2a) i 3a). Również liczby częściowych rozwiązań dla tych zadań są porównywalne: 55% prac dla zadań 1a i 2a) oraz 20% prac dla zadana 3a). Najwięcej błędnych rozwiązań pojawiło się w zadaniu 3a) (60% prac studentów).

Numer zadania	Polecenie	Poprawne	Częściowe	Błędne	Brak	Razem
1	a)	5	11	4	0	20
1	b)	7	2	0	11	20
1	c)	3	0	9	8	20
1	d)	3	3	0	14	20
2	a)	4	11	5	0	20
2	b)	2	2	1	15	20
2	c)	0	1	2	17	20
3	a)	4	4	12	0	20
3	b)	2	0	11	7	20
3	c)	0	2	8	10	20

Tabela 2. Wyniki badania studentów II roku matematyki.

Brak rozwiązań zadań 1b), 1d), 2b), 2c), 3c) może świadczyć o tym, że u badanych studentów nie zostały jeszcze ukształtowane różne aspekty matematycznej aktywności, takie jak dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, formułowanie i uzasadnianie twierdzeń, dedukowanie (Krygowska 1986). Okazało się, że 55% uczestniczących w badaniach studentów II roku matematyki nie podjęło próby sformułowania żadnej zależności między elementami prostopadłościanu, mimo tego, że niektórzy z nich w rozwiązaniu zadania 1a) korzystali z pewnych związków. Zadanie 1d) wymagało posłużenia się pojęciem rzutu prostokątnego prostopadłościanu na płaszczyznę podstawy i przeniesienia znalezionych prawidłowości z przestrzeni na płaszczyznę. W jego rozwiązaniu należało więc dostrzec i wykorzystać pewne analogie. Podobnych umiejętności wymagało rozwiązanie zadania 3c). Rozwiązywania omawianych zadań nie podjęło się odpowiednio 70% i 50% badanych.

Rozwiązania zadań 2b) i 2c) wymagały umiejętności dowodzenia lub wyciągania wniosków ze znalezionych już wcześniej informacji. Próby rozwiązywania tych zadań nie podjęło odpowiednio 75% i 85% respondentów. Świadczy to zapewne o braku doświadczenia studentów w samodzielnym prowadzeniu rozumowań matematycznych.

Jednym z ważnych czynników, wpływających na zachowanie się człowieka w otaczającym świecie, jest jego intuicja. Psychologia rozumie przez intuicję *sposób rozumienia lub poznania, który można scharakteryzować jako bezpośredni i natychmiastowy nie oparty na świadomym rozumowaniu* (Reber, Reber, 2005). W każdym z trzech zadań kwestionariusza znajdowały się zadania, w rozwiązaniu których mogła pomóc lub przeszkodzić intuicja rozwiązującego. Były to polecenia 1c), 2c) , 3b). Z danych zamieszczonych w Tabeli 2 wynika, że 45% badanych błędnie rozwiązało zadanie 1c), 85% osób nie podjęło próby rozwiązania zadania 2c), a 10% studentów rozwiązało je błędnie oraz 55% badanych rozwiązało błędnie zadanie 3b), a 35% osób nie rozwiązywało go wcale.

Do najczęściej popełnianych błędów należy zaliczyć:

- źle zastosowane definicje funkcji trygonometrycznych,
- źle zaznaczone kąty na sporządzonych rysunkach, co w konsekwencji prowadziło do uzyskania złych zależności,
- zły wzór na przekątną prostopadłościanu; błąd ten pojawił się jedynie u 15% studentów roku drugiego i stał się powodem doprecyzowania stosownego sformułowania w części teoretycznej „nowego” (zamieszczonego w aneksie) kwestionariusza badań,
- zastosowanie wzoru na objętość prostopadłościanu (ze współczynnikiem $\frac{1}{3}$).

Pierwsze dwa rodzaje błędów spowodowały, że 60% badanych nie rozwiązało poprawnie zadania 3a).

2.2. Analiza odpowiedzi studentów roku pierwszego

W tabeli 3 przedstawiono wyniki uzyskane przez studentów roku pierwszego. Również i tu zadania 1a), 2a) i 3a) okazały się być dla studentów dość łatwe. Najwięcej osób (93% badanych) podjęło próbę rozwiązania zadania 3a), ale tylko 33% respondentów rozwiązało je poprawnie, a 7% badanych – częściowo. Próbę rozwiązania zadania 1a) podjęło 83% badanych. Liczba poprawnych rozwiązań była porównywalna do liczby poprawnych rozwiązań w zadaniu 3a) i wynosiła 30% ogółu prac. Najsłabiej wypadło rozwiązanie zadania 2a). Zadanie to rozwiązywało 71% uczestników badań, ale tylko 12% studentów uzyskało poprawne rozwiązanie, a pozostałe 59% badanych podało rozwiązanie częściowe. Najtrudniejszym dla badanych było polecenie 1e). Zadania tego nie rozwiązywało nieco ponad 73% osób uczestniczących w badaniach. Poprawne rozwiązanie uzyskało jedynie 12% respondentów.

Postawiony w poleceniu 1d) problem dotyczący sumy kwadratów cosinusów kątów nachylenia przekątnej do krawędzi prostopadłościanu podjęło jedynie 18% uczestników badań, lecz tylko 12% respondentów rozwiązało go poprawnie.

Numer zadania	Polecenie	Poprawne	Częściowe	Błędne	Brak	Razem
1	a)	20	7	30	9	66
1	b)	19	0	4	43	66
1	c)	10	0	16	40	66
1	d)	8	0	4	54	66
1	e)	8	1	0	57	66
2	a)	8	39	5	14	66
2	b)	5	5	1	55	66
2	c)	0	2	2	62	66
3	a)	22	6	33	5	66
3	b)	0	11	26	29	66
3	c)	6	14	6	40	66

Tabela 3. Wyniki badania dla studentów I roku matematyki.

Podobnie jak w badaniu pilotażowym (paragraf 2.1) niewielka grupa studentów (12% respondentów) poprawnie oceniła, że nie istnieje prostopadłościan, w którym kąty nachylenia przekątnej prostopadłościanu do każdej z krawędzi ma miarę $\frac{\pi}{4}$. Natomiast 24% badanych studentów uważała, że taki prostopadłościan istnieje. Fakt ten świadczyć może o braku umiejętności znalezienia twierdzenia 2 i o bardzo silnej intuicji istnienia sześcianu, który jest prostopadłościanem o krawędziach równej długości. Jak wynika z paragrafu 2.1, problem ten pojawił się również u studentów roku II, którzy powinni legitymować się już znacznie większym doświadczeniem w formułowaniu i stosowaniu twierdzeń od studentów roku I.

Warto podkreślić, że najwięcej poprawnych rozwiązań (33% wszystkich prac) uzyskali respondenci w zadaniu 3a), zaś najmniej (zero) w części c) zadania 2 oraz w części b) zadania 3.

Analizując dane należy stwierdzić, że również duże trudności sprawiło badanym rozwiązanie zadań 2b), 2c), 3b) oraz 3c). Jednocześnie bardzo wielu studentów nie podejmowało prób pracy nad tymi zadaniami. Najwięcej osób nie pracowało nad częścią c) zadania 2.

Wyniki badań wskazują na braki w umiejętnościach dostrzegania analogii (zadanie 3a) oraz 3c)), stosowania twierdzeń do konkretnych sytuacji (zadanie 1c), 2c)) oraz konieczności zakładania istnienia uzyskanych wyników (zadanie 3b, 3c)). Stosunkowo duża liczba błędnych rozwiązań w zadaniu 3b) na obu omawianych rocznikach świadczy o słabym przygotowaniu badanych do rozwiązywania prostych nierówności trygonometrycznych.

2.3. Analiza odpowiedzi studentów roku trzeciego

Wyniki badań dla grupy studentów trzeciego roku matematyki prezentuje tabela 4.

Numer zadania	Polecenie	Poprawne	Częściowe	Błędne	Brak	Razem
1	a)	6	11	9	2	28
1	b)	5	0	0	23	28
1	c)	5	1	1	21	28
1	d)	3	2	1	22	28
1	e)	2	0	0	26	28
2	a)	7	10	2	7	28
2	b)	4	0	0	26	28
2	c)	0	3	0	25	28
3	a)	11	0	16	1	28
3	b)	2	11	6	9	28
3	c)	3	5	9	11	28

Tabela 4. Wyniki badania dla studentów III roku matematyki.

Wynika z niej, że podobnie jak miało to miejsce w przypadku studentów I i II roku studiów (paragrafy 2.1, 2.2), zadania 1a) i 3a) okazały się najłatwiejsze, a zadanie 2a) nieco trudniejsze. Zadanie 1a) rozwiązywało nieco ponad 93% respondentów, ale poprawne rozwiązania uzyskało tylko 21% badanych, a 39% uczestników badań podało rozwiązania częściowe. Najmniej trudności sprawiło badanym zadanie 3a), bowiem tutaj najliczniejsza grupa osób (33% badanych) uzyskała poprawne rozwiązanie i nie odnotowano rozwiązań częściowych. Próby rozwiązania zadania 2a) nie podjęła czwarta część badanych a tyle samo osób rozwiązało je poprawnie. Natomiast 36% uczestników badań podało rozwiązania częściowe. Osoby podające rozwiązania częściowe rozpoczynały rozwiązywanie zadania nie kontynuując go, mimo wyboru poprawnej metody. Prawdopodobnie osoby te nie miały świadomości tego faktu.

W zadaniu 1a) 32% respondentów popełniło błędy. Dotyczyły one na ogół źle zastosowanych definicji funkcji trygonometrycznych.

Poprawne rozwiązanie pozostałych części zadania sprawiło studentom duże trudności. Najłatwiejszym z nich okazało się polecenie 1c). Niewielka liczba błędnych odpowiedzi może świadczyć o tym, że badani studenci trzeciego roku studiów nauczycielskich potrafią prowadzić proste rozważania i dostrzegać zachodzące prawidłowości.

Najtrudniejszym dla studentów okazało się polecenie 1e) wymagające wykorzystania rzutu prostokątnego prostopadłościanu na płaszczyznę jego podstawy. Próby rozwiązania tego zadania nie podjęło prawie 93% respondentów. Jest to prawdopodobnie związane z zmieniającymi się programami nauczania geometrii na różnych poziomach edukacji, a w tym ze zubożeniem treści programowych.

Podobnie jak studentom I roku, duże trudności sprawiło badanym rozwiązanie części b) oraz c) zadań 2 i 3. Zauważyć też należy, że wszystkie osoby podejmujące się rozwiązania zadania 2b) polecenie zawarte w treści zadania wykonały poprawnie. Jednocześnie praktycznie wszyscy badani (poza jedna osobą) pracowali nad zadaniem 3a), przy czym rozwiązania błędne stanowią tu ponad 50% wszystkich prac.

2.4. Analiza odpowiedzi studentów roku piątego

Wyniki badań dla grupy studentów roku piątego prezentuje tabela 5.

Zadanie 1a) rozwiązywali wszyscy uczestnicy badań, z czego 93% badanych uzyskało poprawny wynik. Konsekwencją tego wyniku jest wystąpienie dużej liczby odpowiedzi w poleceniu 1b). Zadanie 1b) rozwiązywało ponad 81% badanych, formułując różne prawidłowości, w tym również występujące w twierdzeniach 1 i 2. Prawidłowości te opisywały poprawnie relacje zachodzące między elementami prostopadłościanu, chociaż ich sformułowania nie zawsze były formalnie precyzyjne. Podawano je często w postaci zdań twierdzących bez określania znaczenia występujących w nich symboli, lecz w kilku przypadkach podawano rysunek wraz z naniesionymi oznaczeniami.

Zauważmy również, że prawie wszyscy studenci podjęli próbę rozwiązania zadań 2a i 3a). Mimo tego nie wszystkie rozwiązania były poprawne. W zadaniu

3a) uzyskano jedynie 56% poprawnych rozwiązań, natomiast w zadaniu 2a) rozwiązania poprawne stanowiły 48% ogółu prac, a rozwiązania częściowe 44% liczby wszystkich rozwiązań.

Naszym zdaniem zaskakujące są odpowiedzi uzyskane w poleceniu 1c). Zadanie to poprawnie rozwiązało jedynie 52% osób uczestniczących w badaniach, a 41% osób udzieliło błędnej odpowiedzi. Sugestia, że szukaną bryłą może być sześcian jest tak silna i narzucająca się spontanicznie, że blokuje dalsze rozważania eliminujące ten przypadek. Fakt ten można uznać za uzasadnienie prawdziwości stwierdzenia, iż intuicja studentów przeszkodziła im w poprawnym rozwiązaniu zadania (zob. paragraf 3.1). Być może zbyt rzadko spotykali się oni z sytuacjami zmuszającymi do głębszej refleksji nad otrzymanym wynikiem w rozwiązaniu zadania.

Numer zadania	Polecenie	Poprawne	Częściowe	Błędne	Brak	Razem
1	a)	25	0	2	0	27
1	b)	22	0	0	5	27
1	c)	14	0	11	2	27
1	d)	20	0	2	5	27
1	e)	6	0	0	21	27
2	a)	13	12	0	2	27
2	b)	12	2	0	13	27
2	c)	0	4	0	23	27
3	a)	15	0	8	4	27
3	b)	4	2	13	6	27
3	c)	4	5	11	7	27

Tabela 5. Wyniki badania dla studentów V roku matematyki.

Studenci roku piątego, uczestniczący w badaniach, wykazali się umiejętnością dowodzenia twierdzeń. Świadczą o tym rozwiązania zadania 1d) (poprawne rozwiązanie uzyskało 74% badanych). Posiadają oni również umiejętność dostrzegania analogii. Osoby, które znały definicję rzutu prostokątnego bez większych trudności dostrzegły prawidłowości, o których pytano w poleceniu 1e).

Gorsze wyniki osiągnęli studenci pracując nad zadaniami 2b), 2c), 3b), 3c). W zadaniu 2b) podano jedynie 44% poprawnych odpowiedzi. Na uwagę zasługuje fakt, że studenci kończący studia nie uzyskali ani jednej poprawnej odpowiedzi w części c) zadania 2. Również niewielka liczba osób (po 4 studentów, co stanowi około 14% badanych) rozwiązała poprawnie części b) oraz c) zadania 3.

3. Wnioski i hipotezy badawcze

Odnotujmy na wstępie, że pojęcia geometrii przestrzennej, służące opisywaniu wzajemnych związków między elementami przestrzeni trójwymiarowej, są kształtowane w toku nauki szkolnej przez cały okres edukacji matematycznej, a nawet wcześniej. Zalążki tych pojęć, a w tym orientacja w schemacie własnego ciała zaczynają powstawać w świadomości dziecka już w wieku niemowlęcym. W szkole ponadgimnazjalnej do opisu relacji zachodzących między elementami tej przestrzeni bardzo często używa się funkcji trygonometrycznych. Jak wskazują wyniki badań (paragraf 2), studenci z ich wykorzystaniem mają duże trudności. Jednocześnie słabe opanowanie posługiwania się tymi pojęciami zubaża doświadczenia matematyczne uczących się – przyszłych nauczycieli, co może odbić się na sposobie przekazywania i prezentowania treści stereometrycznych ich uczniom.

W wyniku analizy materiału badawczego można wysnuć następujące wnioski dotyczące odpowiedzi na postawione w paragrafie 2.1 pytanie badawcze.

Umiejętność formułowania prawidłowości, pojawiających się w toku rozwiązywania zadania w postaci twierdzeń, sprawia studentom spore trudności. Może nie dziwić fakt, że nie posiada tej umiejętności 65% studentów roku I (umiejętność posiada jedynie 15% badanych z I roku). Studenci ci mają przecież jeszcze zbyt małe doświadczenie w twórczej działalności matematycznej. Niejakim zaskoczeniem jest jednak fakt, że omawianej umiejętności nie posiada 82% studentów roku III (tabela 4). Gdyby nie ten wynik, to można by zaryzykować stwierdzenie, że w miarę studiowania matematyki umiejętności znajdowania różnych prawidłowości wzrasta na poszczególnych latach studiów. Na roku piątym wykazało się tą umiejętnością 81% uczestniczących w badaniach (tabela 5, zad. 1b)).

Z analizy wytworów działania uczestników badań wynika, iż większość z nich nie wykazywała gotowości do precyzyjnego formułowania twierdzeń matematycznych (por. np. paragraf 2.4), chociaż dane z tabel 2–5 (zad. 1b) wskazują na fakt, że umiejętność ta rozwija się w trakcie studiów. Oczywiście w treści zadań nie zostało sformułowane wprost polecenie dotyczące podania zaobserwowanej prawidłowości w postaci twierdzenia. Jednak, ze względu na charakter kształcenia studentów w naszej uczelni, taka postawa jest pożądaną. Obserwowane podejście do pracy nad zadaniem związane jest, naszym zdaniem, w dużej mierze, z jeszcze niską dojrzałością matematyczną badanych. Jest to według nas dość niepokojący sygnał, zważywszy na to, iż niektórzy z nich będą (bądź już są) nauczycielami matematyki, którzy powinni być uwrażliwieni na czynienie tego typu obserwacji, tj. np. na formułowanie wniosków z prowadzonych rozumowań.

Jednym z aspektów matematycznej aktywności, mającym istotny wpływ na proces znajdowania lub odkrywania nowych twierdzeń, jest dedukowanie. W omawianych badaniach umiejętność ta potrzebna była m.in. w rozwiązaniu zadań 1c), 1d), 2b), 3b). Badania ujawniły trudności studentów w formułowaniu obserwowanych zależności, prowadzeniu rozumowań, posługiwaniu się dowodem nie wprost (por. zadania 1.c, paragrafy 2.1, 2.2). W rozwiązaniach wspomnianych tu zadań na te trudności miało wpływ posługiwanie się błędnymi informacjami, np. źle zaznaczonymi na rysunku potrzebnymi kątami lub błędnie dobranymi funkcjami trygonometrycznymi (Major, Powązka, 2010).

Wydaje się, że tak dedukowanie, jak uogólnianie i specyfikowanie nie są u badanych należycie ukształtowane i proces ten wymaga dalszych zabiegów dydaktycznych. Te aspekty działalności matematycznej powinny być rozwijane w trakcie studiów matematycznych i z całą pewnością są potrzebne przyszłym nauczycielom. Są one również niezbędne każdemu człowiekowi w sprawnym poruszaniu się i komunikowaniu z innymi ludźmi.

Na wspomniane tu trudności wpływa zapewne również fakt potwierdzony wynikami badań, że ich uczestnicy w większości traktowali zadanie matematyczne jako obiekt zamknięty, złożony z danych i szukanych elementów. Znalezienie rozwiązania, ich zdaniem, kończy pracę nad zadaniem i nie wymaga weryfikacji otrzymanego wyniku z danymi wyjściowymi. Taka postawa uniemożliwia odkrywanie lub znajdowanie nowych twierdzeń, inspirowanych rozważanym zadaniem. Sądzimy, że może być to wynik stosunku osoby rozwiązującej zadanie do wykonywanej pracy, wynikający z braku zainteresowań i motywacji do dalszego działania.

Wydaje nam się, że przez konsekwentne uczenie stawiania sobie pytań typu:

- Skąd to się wzięło?
- Dlaczego jest tak, a nie inaczej?
- Czy otrzymany wynik jest rzeczywiście możliwy?

można w osobie uczącej się wykształcić ten aspekt matematycznej aktywności polegający na potrzebie twórczego działania. Jak widać u większości badanych studentów, ta aktywność nie rozwinęła się jeszcze należycie w trakcie dotychczasowej edukacji.

Zauważmy na koniec, że dla większości respondentów zadania 1a), 2a) i 3a) były nietrudne. Niepokojące są natomiast braki badanych w umiejętności rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych oraz trudności w poprawnym przekształcaniu wyrażeń algebraicznych, zwłaszcza takich, w których występują funkcje trygonometryczne. Przyczyną takiego stanu rzeczy jest naszym zdaniem fakt, iż studenci (jako uczniowie szkół ponadgimnazjalnyh poświęcili zbyt mało czasu na naukę i doskonalenie umiejętności związanych z posługiwaniem się funkcjami trygonometrycznymi. Taki stan rzeczy wynika z układu materiału szkolnego, w którym dla dość trudnego działu matematyki przewidziany jest krótki czas realizacji.

Literatura

[1] Krygowska, Z.: 1977; *Zarys dydaktyki matematyki*, WSiP, Warszawa.

[2] Krygowska, Z.: 1986; *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka Matematyki 6, s. 25–41.

[3] Major J., Powązka Z.: 2009; *Finding properties of prisms and pyramids while solving stereometric problems*, Acta Mathematica 12, Zborník zo VII. nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre v dňoch 24.-25. septembra 2009, s. 215–220.

[4] Major J., Powązka Z.: 2010; *From researches upon solving stereometric tasks by students*, Acta Mathematica 13, Zväzok 1, Zborník zo VIII. nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre v dňoch 16.-17. septembra 2010, s. 139–144.

[5] Polya G.: 1993; *Jak to rozwiązać*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

[6] *Mały Słownik Języka Polskiego*, pod. red. Skorupka S., Auderska H., Łempicka Z., 1969, PWN, Waszawa.

[7] Reber A. S., Reber E. S.: 2005; *Słownik psychologii*, polskie wydanie pod red. prof. dr hab. I. Kurcz, Warszawa.

[8] *Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia* 23 *grudnia* 2008 *r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół*, Dz. U. Nr 4 poz. 17.

Aneks

Kwestionariusz badań

Prosimy o uważne przeczytanie poniższego tekstu i dokładne wykonanie zawartych w nim poleceń. Dotyczą one zadań związanych z obliczaniem objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Poniżej przypominamy najważniejsze fakty, z których można skorzystać podczas wypełniania kwestionariusza.

- Objętość graniastosłupa prostego jest równa iloczynowi pola podstawy tego graniastosłupa i długości jego wysokości.

- Objętość ostrosłupa prostego jest równa jednej trzeciej iloczynu pola podstawy tego ostrosłupa i długości jego wysokości.
- W prostopadłościanie o krawędziach długości a, b, c kwadrat długości przekątnej tego prostopadłościanu równa się sumie kwadratów liczb a, b, c.
- W każdym trójkącie iloraz długości dowolnego boku przez sinus kąta przeciwległego temu bokowi jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie (twierdzenie sinusów).

Zadanie 1.

a) Obliczyć objętość prostopadłościanu, wiedząc, że przekątna długości d tworzy z krawędziami tego prostopadłościanu kąty o miarach α, β, γ.

b) Analizując przeprowadzony rachunek ustalić zależność między długościami krawędzi tego prostopadłościanu, długością jego przekątnej oraz stosownymi funkcjami trygonometrycznymi danych w zadaniu a) kątów.

c) Rozstrzygnąć, czy istnieje prostopadłościan, w którym kąty nachylenia przekątnej d do odpowiednich krawędzi spełniają warunki: $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnić.

d) Rozstrzygnąć, czy suma kwadratów cosinusów kątów α, β, γ zależy od wymiarów danego prostopadłościanu.

e) Rozważyć rzut prostokątny prostopadłościanu na płaszczyznę jego podstawy i znaleźć odpowiednik(i) zależności otrzymanej(ych) w punktach b) i d).

Zadanie 2.

a) Obliczyć objętość prostopadłościanu, wiedząc, że przekątna długości d tworzy z płaszczyzną podstawy kąt γ i przekątne ścian boczych tego prostopadłościanu wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą z podstawą kąty o miarach α, β.

b) Wykorzystując zależności wyznaczone w punkcie a) tego zadania wykazać równość:
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta = \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

c) Korzystając ze wzoru z części b) ustalić związek między miarami kątów nachylenia do płaszczyzny podstawy przekątnej sześcianu i przekątnej ściany bocznej tego sześcianu wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

Zadanie 3.

a) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Obliczyć objętość tego ostrosłupa wiedząc, że kąt nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy wychodzącej z tego samego wierzchołka ma miarę α.

b) Na podstawie otrzymanego wzoru rozstrzygnąć, czy kąt α może być dowolnym kątem ostrym. Odpowiedź uzasadnić

c) Jak zmienią się odpowiedzi w zadaniach a) i b), gdy zamiast ostrosłupa prawidłowego o podstawie kwadratu rozważymy ostrosłup prawidłowy o podstawie trójkąta równobocznego?

Autorzy pracują w Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie