Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Antoni Pardała (Rzeszów)

O niektórych problemach nauczania matematyki

Streszczenie

Edukacja matematyczna ulegała przemianom powodowanym uwarunkowaniami, w jakich była ulepszana i modernizowana. Kierunki tych przemian były i są wyznaczane przez współczesne koncepcje edukacyjne. I w naturalny sposób wynikają z przekształceń warunków społecznych i ekonomicznych w danym kraju bądź regionie. W szczególności, są one integralnie związane z ulepszeniem, unowocześnieniem i poprawą jakości kształcenia matematycznego uczniów i studentów. Towarzyszy im balans między dwoma tendencjami. Z jednej strony chodzi m. in. o zachowanie tradycyjnego rdzenia matematyki, jej walorów kształcących i aplikacyjnych, a z drugiej o rozważną modernizację treści i metod nauczania matematyki oraz form aktywizacji uczniów i studentów. Autor artykułu opracował jego temat z perspektywy wskazań i krytycznej analizy wybranej współczesnej literatury, doboru zadań i metodyki nauki ich rozwiązywania oraz doświadczeń z pracy ze studentami matematyki specjalności nauczycielskiej. W jego zakończeniu przedstawił uwagi i refleksje dotyczące stosowania programów komputerowych i technologii informacyjnej w nauczaniu matematyki.

1. Wstęp: kształcenie matematyczne z perspektywy reform w XX wieku

Pod koniec XIX wieku w Niemczech oraz w innych państwach świata ujawnił się „ruch inżynieryjny". Ten postęp cywilizacyjny i technologiczny wymusił potrzebę zreformowania kształcenia matematycznego uczniów i studentów oraz przyszłych nauczycieli matematyki, wobec dostrzeganych skumulowanych niedostatków, niedoskonałości w szkolnym i akademickim nauczaniu matematyki. Taką potrzebę radykalnej reformy edukacji matematycznej dostrzegł wybitny uczony i organizator nauki Feliks Klein, a powody i konieczności oraz kierunki zreformowania kształcenia nauczycieli matematyki (na podstawie analizy ich studiów oraz organizowanych dla nich kursów w Getyndze) przedstawił w 1893 roku w Evanston dla członków Kongresu Matematycznego w Chicago. Zarówno idee jak i zasady sformułowane przez F. Kleina stały się swoistym fundamentem „programu merańskiego" przyjętego w 1905 roku w Meranie. Idee tego programu przeniknęły do innych państw. Co więcej, problemy nauczania matematyki były postawione, dyskutowane i promowane w 1908 roku na IV Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Rzymie. A F. Klein został współorganizatorem powołania tam Międzynarodowej Komisji do spraw nauczania matematyki, zob. M.Kordos (2010), K. Wuczyńska (2010).

Kierunki rozwoju matematyki I połowy XX wieku zostały zarysowane i zdominowane między innymi przez problemy otwarte D. Hilberta sformułowane w 1900 roku na Kongresie Matematycznym w Paryżu oraz przez wyniki badań w zakresie podstaw matematyki K. Gödla. Pierwsza dekada II połowy XX wieku była początkiem nowej filozofii w zakresie kształcenia matematycznego, nazywanej wówczas Nową Matematyką, bądź „matematyką w stylu Bourbaki podrzuconą do szkoły", Rayaumont (1959). W latach 1960–1990 ujawniły się w świecie trzy „fale" bourbakistowskiej koncepcji uprawiania matematyki oraz reformowania kształcenia matematycznego pod hasłem: *nowa matematyka, czy nowe jej nauczanie*? Także polski kanon nauczania i uczenia się matematyki, a szczególnie geometrii w szkole średniej był jej pewną konkretyzacją. W Polsce toczył się spór o oblicze matematyki szkolnej i jej nauczanie w szkołach podstawowych i średnich, o jej program nauczania i obudowę dydaktyczną (podręczniki, materiały dydaktyczne, środki i pomoce dydaktyczne), o czym piszą m.in. autorzy „Raportu o edukacji matematycznej w Polsce" (1988). Idee bourbakistowskiej koncepcji kształcenia matematycznego wspierane były między innymi ustaleniami na XIX Międzynarodowej Konferencji o Edukacji Publicznej w Genewie w 1956 roku (International Conference on Public Education in Geneva), gdzie artykułowano rolę i znaczenie matematyki oraz jej nauczania w rozwoju intelektualnym ucznia. Przed konsekwencjami tej koncepcji przestrzegał prawie dwie dekady później R. Thom (1974): *w szkole nie matematyka ma być nowoczesna, ale jej nauczanie.* Wnikliwą analizę porównawczą i krytykę ówczesnych światowych koncepcji i tendencji powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych wykonała Z. Krygowska (1984). Natomiast ujawnione niedostatki i przyczyny niepowodzenia kolejnych trzech „fal" bourbakistowskiej koncepcji reformowania kształcenia matematycznego zostały określone w literaturze z dydaktyki matematyki, jako błąd dydaktyczny XX wieku, zob.: H. Freudenthal (1989). Skutkami załamania się tej koncepcji było złagodzenie priorytetu dedukcji globalnej, ścisłości i formalizmu w nauczaniu matematyki. Równolegle do praktyki nauczania matematyki zaczęły przenikać idee współczesnych prądów filozofii matematyki, np. filozofii powątpiewania (dowodzenia i odrzucania) I. Lakatosa i stosowanie jego heurystyki, a także idee informatyzowania i komputerowego wspomagania kształcenia matematycznego.

Nieco odrębną historię miały reformy i koncepcje kształcenia matematycznego w Rosji do i po 1917 roku. W szczególności, przenikanie idei bourbakistowskiej orientacji nauczania matematyki do ZSRR rozpoczęło się w 1968 roku od reformy szkolnego matematycznego kształcenia, której liderem był akademik A. N. Kołmogorow. Ta reforma przewidywała rewolucyjne zmiany w treściach nauczania szkolnego kursu matematyki. Przejście na nowe treści i teoriomnogościowe ich ujęcie było nowym wyzwaniem dla nauczycieli matematyki, wobec braku doświadczeń i konieczności poznania nowej terminologii i symboliki, nowego ujęcia wiodących pojęć matematycznych. To były między innymi niektóre powody niepowodzenia „reformy Kołmogorowa". A od 1980 roku do chwili obecnej nauczanie matematyki w masowej szkole średniej wróciło praktycznie do zgromadzonych tradycji i pozytywnych doświadczeń rosyjskiej szkoły z początku XIX wieku, zob.: Колягин Ю. М. и савт. (2009). Ta problematyka była przedmiotem wnikliwego współczesnego badania i pozwoliła poznać ich swoiste, narodowe tradycje i doświadczenia, które przenikały się bądź nie ze światowymi trendami w kształceniu matematycznym. Wyniki tego badania zawarte są w monografii pt.: Russian Mathematics Education (History and World Significance) oraz odsłoniły i potwierdziły także światowe znaczenie i wkład rosyjskich koncepcji w kształcenie kadr matematycznych, technicznych i innych oraz w rozwój nauki i cywilizacji, zob.: A. Karp & B. R. Vogeli (2010).

Edukacja matematyczna, jak każda sfera działalności człowieka w społeczeństwie, ulega przemianom związanym ze zmianami uwarunkowań, w których jest ulepszana i modernizowana. Z jednej strony, obecnie ten kierunek myślenia i ta idea znajduje zróżnicowane odzwierciedlenie w konkretyzacji i opisie współczesnych standardów edukacji matematycznej uczniów i studentów w wielu państwach świata. To zróżnicowanie rzutuje na wyniki osiągnięć uczniów oraz studentów z matematyki. Na przykład, widać to w kolejnych edycjach badań międzynarodowych PISA, zob.: M. Legutko (2006). Z drugiej strony, współczesne publikacje z dydaktyki matematyki wskazują między innymi na aspekty teoretyczne i praktyczne kształcenia matematycznego uczniów i studentów, rolę i znaczenie akademickich instytucji w aktualizacji treści tego kształcenia, a także na specyficzne jego kategorie dydaktyczne takie, jak: podstawa programowa, style nauczania matematyki i postawy uczących się matematyki, poziomy i specjalizacje w nauczaniu matematyki, produktywność nauczania matematyki, funkcje podręczników matematyki do nauki i studiowania matematyki itp.

2. Cele i pytania badawcze pracy oraz jej metodologia

Kierunki zmian w kształceniu matematycznym były i są wyznaczane przez współczesne koncepcje edukacyjne oraz korygowane są przez wskazania ekspertów i środowiska opiniotwórcze, prace studyjne i eksperymentalne. Te zmiany wynikają także z przekształceń warunków społecznych i technicznych w danym kraju bądź regionie. Są one integralnie związane z ulepszeniem i unowocześnieniem jakości kształcenia na kolejnych etapach edukacji matematycznej. Towarzyszy im balans między dwoma tendencjami: z jednej strony chodzi o zachowanie tradycyjnego rdzenia matematyki, jej walorów kształcących i aplikacyjnych oraz sprawdzonych, skutecznych metodyk jej nauczania, a z drugiej chodzi o renowacje treści, ich ujęcia i metod nauczania matematyki oraz wdrażanie światowych i sprawdzonych innowacji dydaktycznych do procesu nauczania matematyki.

Temat pracy dotyczy problematyki jednego ze współczesnych nurtów badawczych dydaktyki matematyki, który określa się jako: **wyzwania, innowacje i problemy nauczania matematyki w XXI wieku**. Metodologia jego opracowania oparta jest na analizie adekwatnie dobranej i wykorzystanej współczesnej literatury z dydaktyki matematyki, a także ma charakter *case study* osobistych doświadczeń autora z hospitacji lekcji matematyki i TI oraz z pracy ze studentami matematyki specjalności nauczycielskiej. **Celem badawczym** pracy jest: 1) zarysować ewolucję reform kształcenia matematycznego w świecie w XX wieku, 2) wskazać, przybliżyć i opisać pewne problemy kształcenia matematycznego uczniów i studentów - przyszłych nauczycieli matematyki. W pracy próbuję znaleźć odpowiedź na poniższe **dwa pytania badawcze**: 1) Jaka jest synteza wiedzy o reformach kształcenia matematycznego z perspektywy historycznej i publikacji z dydaktyki matematyki? 2) Jakie są wyniki, doświadczenia i praktyka dotyczące diagnozowania i poprawy jakości kształcenia matematycznego uczniów szkół ponadgimnazjalnych i studentów? W podsumowaniu pracy przedstawia się uwagi i refleksje końcowe dotyczące wskazanych i analizowanych problemów nauczania matematyki, jak również stosowania programów komputerowych i technologii informacyjnej (TI) w nauczaniu matematyki.

3. Kształcenie matematyczne z perspektywy „nowej rewolucji maturalnej”

Jakość kształcenia matematycznego uczniów i młodzieży szkolnej jest przedmiotem zainteresowania środowisk szkolnych, akademickich i opiniotwórczych. W szczególności, wyniki egzaminu gimnazjalnego i maturalnego z matematyki są przedmiotem wnikliwych badań i analiz między innymi zespołów badawczych z OKE i CKE. Zaniepokojenie muszą budzić pewne negatywne zjawiska, do których zalicza się: 1) obniżenie statusu matematyki jako przedmiotu szkolnego nauczania; 2) spadek zainteresowania młodzieży kształceniem matematycznym mierzony liczbą osób zdających egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym, a także słabe ich wyniki z tego egzaminu, np. egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym w 2006 roku zdawało 66878 osób, ponad 40% tej populacji (prawie 30 tys. osób) uzyskało mniej niż 30% możliwych punktów do otrzymania; 3) spadek zainteresowania absolwentów szkół ponadgimnazjalnych podejmowaniem studiów w zakresie nauk ścisłych i technicznych; 4) niezadawalający poziom szkolnej wiedzy matematycznej u kandydatów na studia, także u absolwentów którzy zdawali egzamin maturalny z matematyki, co stwierdzali przedstawiciele środowisk matematycznych szkół wyższych; 5) dyskredytowanie tradycyjnego nauczania matematyki i potrzeby matematycznych uzasadnień na rzecz preferowania odwoływania się do aplikacji i programów komputerowych, Internetu i TI oraz złudnego przekonania młodzieży do ich nieograniczonych możliwości. Twierdzę, że wdrożona reforma systemu szkolnego w 1999 roku i „modernizacja" matematycznego kształcenia nie generuje zadawalająco podniesienie poziomu jakości tego kształcenia. Na przykład, niektórzy absolwenci szkół ponadgimnazjalnych z 2010 roku, jako studenci, wykazują rażącą niewiedzę matematyczną: nie odróżniają iloczynu od ilorazu, nie znają języka matematycznego i symboliki matematycznej, mają braki w umiejętnościach rozwiązywania elementarnych równań i nierówności stopnia pierwszego bądź drugiego.

Ten ujawniony i zarysowany powyżej niekorzystny trend mógł spowodować, że polskie szkoły mogły stać się barierą dla rozwoju intelektualnego i zawodowego młodzieży, a szczególnie ambitnej i matematycznie uzdolnionej. I w tym kontekście warto tu za I. F. Sharyginem przytoczyć słowa wybitnego matematyka rosyjskiego V. I. Arnolda: *ci, którzy nie będą mistrzami sztuki rygorów matematycznych uzasadnień w szkole, nie zdołają odróżnić między prawdziwym i fałszywym uzasadnieniem. Nieodpowiedzialni politycy mogą łatwo manipulować takim człowiekiem*, z jego referatu pt.: *Antiscientific Revolution and Mathematics* at the International Congress of Papal Academy of Sciences in Vatican, October 26, 1998. Także godzi się tu odnotować, że na podobne zjawisko w amerykańskich szkołach zwrócił uwagę 7 III 2007 roku Bill Gates na forum Kongresu USA. I apelował o zmianę programów nauczania matematyki, fizyki i innych przedmiotów, bo nauki ścisłe w USA stają się coraz mniej konkurencyjne na świecie. Na szczęście ten obniżający się poziom edukacji matematycznej w polskich szkołach ponadgimnazjalnych zaniepokoił bardzo ciała kolegialne i rektorów szkół wyższych oraz komisję edukacji konferencji rektorów wszystkich szkół wyższych w Polsce. Ich przedstawiciele zaczęli mówić „jednym głosem" na przełomie 2006 i 2007 roku w kontaktach z Ministerstwem Edukacji Narodowej (MEN), które podjęło w trybie pilnym prace nad kierunkami zmian i zahamowaniem tych niepokojących zjawisk. W tej sprawie zawarto porozumienie

Ministra Edukacji Narodowej z rektorami szkół wyższych, które określane jest dziś jako **„nowa rewolucja maturalna”**. Oto niektóre najważniejsze jego ustalenia: 1) przyjęto kalendarz ewolucyjnych zmian w przeprowadzaniu egzaminu maturalnego i przeliczaniu jego wyników w latach 2008-2010 na punkty rekrutacyjne w szkołach wyższych, 2) określono próg zdawalności matury na poziomie 30% zarówno dla poziomu podstawowego, jak i rozszerzonego; ale rozszerzony będzie zawierał wiadomości potrzebne do rozwiązania zadań z podstawowego, co w przypadku niepowodzenia będzie dawać możliwość zaliczenia egzaminu na poziomie podstawowym; 3) ustalono, że na maturze w 2010 roku matematyka będzie przedmiotem obowiązkowym na poziomie podstawowym z jednolitym arkuszem egzaminacyjnym. Nadto do czasu wprowadzenia obowiązkowej matury z matematyki MEN zapowiedziało między innymi: 1) przeprowadzenie szerokiej kampanii informacyjnej, społecznej i oswojenie uczniów, rodziców i społeczeństwa z tym zamierzeniem, 2) podniesienie jakości nauczania i uczenia się matematyki w szkołach, także z szerszym i profesjonalnym zakresem stosowania TI, 3) podniesienie na wyższy poziom jakości kształcenia oraz dokształcania i doskonalenia nauczycieli matematyki, także poprzez unowocześnienie programów kształcenia, form kształcenia, zakresu stosowania i „wymuszania” profesjonalnego stosowania w nim TI, 4) nowelizację ustawy o systemie oświaty, która umożliwi tworzenie szkół i odpowiednie formy pomocy merytorycznej, dydaktycznej i finansowej dla utalentowanej młodzieży.

Przywrócenie i wdrożenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki w 2010 roku stało się obecnie „rewolucyjną” zmianą w Polsce dla przyszłości jakości matematycznego kształcenia na każdym etapie edukacji szkolnej i na poziomie akademickim. A nadto wymusiło niewątpliwie zmiany mentalne w środowiskach szkolnych i pozaszkolnych, a szczególnie u rodziców uczniów, dla budowy społeczeństwa informacyjnego. Ten kierunek ulepszenia i modernizacji kształcenia matematycznego spowodował wdrożenie wykonanych już prac koncepcyjnych, programowych i organizacyjnych oraz ich promocję w środowiskach społecznych, bądź ich uszczegółowienie w odpowiednich komisjach i środowiskach zainteresowanych profesjonalistów. Warto tu zwrócić uwagę na niektóre z nich. W zakresie działań programowych na zlecenie MEN opracowano: 1) projekt nowej podstawy programowej z matematyki dla każdego etapu edukacji szkolnej, 2) projekt „docelowej” podstawy programowej z matematyki dla finalnego etapu ponadgimnazjalnego. A w odniesieniu do poziomu akademickiego: 1) wdrożono procedury akredytacji środowiskowej (międzyuczelnianej) i ministerialnej kierunków studiów prowadzonych w polskich szkołach wyższych, 2) uruchomiono proces przechodzenia na studia dwustopniowe prawie na wszystkich kierunkach studiów, wyłączono np. prawo, 3) opracowano standardy kształcenia na studia dwustopniowe z matematyki, czyli dla studiów I stopnia (licencjat) i dla studiów II stopnia (magisterium) nazywanych uzupełniającymi studiami magisterskimi, 4) znowelizowano standardy kształcenia nauczycieli matematyki.

Ponadto wyniki niektórych badań sondażowych odsłoniły pewien niepokój i rzuciły się cieniem na powyżej zarysowane i wdrożone zmiany w zakresie jakości kształcenia matematycznego. Jak pisze Anna Gwozdowska (2009): *według najnowszego sondażu TNS OBOP, aż* 44 *proc. respondentów uważa, że nauki ścisłe są w Polsce mniej popularne niż kiedyś. I trudno się tym wynikom dziwić. Od lat tabuny artystów, polityków, a nawet naukowców zrażają Polaków do fizyki i matematyki. To już tradycja, że przy okazji matur słyszymy wspomnienia gwiazd o tym, jak ściągały na egzaminie z matematyki. Typowy humanista to osobnik, który chwali się tym, że nie ma pojęcia o obliczaniu procentów, nie wspominając o prostym dzieleniu czy podnoszeniu do potęgi. Matematyczna ignorancja jest po prostu modna. Jak to zmienić? Samo wprowadzenie obowiązkowej matury z matematyki nie wystarczy. Potrzebni są nauczyciele z charyzmą, ciekawe podręczniki i dobre uczelnie. Niestety wszystko to wymaga czasu i pieniędzy. Może warto więc podpatrzyć, jak tworzyły się zręby polskiej szkoły matematycznej z czasów międzywojennego dwudziestolecia. Profesorowie wykształceni na zachodnich uniwersytetach, bardzo często sławy w swoich dziedzinach, wracali do odrodzonej Polski nie tylko z patriotycznej potrzeby serca. W kraju cieszyli się estymą, nieźle zarabiali* [*mogli za swoje wynagrodzenie kupić np. fiata*]*, pracowali w systemie, w którym naukowe wynalazki miały szansę na zastosowanie w przemyśle. Dziś takiej atmosfery brakuje. Najzdolniejsi młodzi ludzie wyjeżdżają za granicę, a profesorowie chałturzą na kilku uczelniach, żeby żyć na godnym poziomie. Na tym cierpi z kolei poziom ich badań i wykładów. Dlatego specjalne stypendia, które obecna minister szkolnictwa wyższego oferuje studentom decydującym się na naukę na kierunkach ścisłych, nie wystarczą. Im szybciej zrozumieją to politycy, zazwyczaj rekrutujący się z opisanych wyżej tabunów humanistów, tym lepiej.*

Jakość kształcenia matematycznego uczniów, studentów i pracy nauczyciela matematyki oceniana jest i będzie przez pryzmat skuteczności jego nauki rozwiązywania zadań matematycznych. Zwróćmy obecnie uwagę na pewne doświadczenia i przykłady autora tej pracy z praktyki kształcenia nauczycieli matematyki dotyczące doskonalenia ich umiejętności między innymi w zakresie rozwiązywania zadań matematycznych.

4. Przykłady z praktyki kształcenia nauczycieli matematyki

P. J. Taylor (2003) twierdzi, że matematyka i nauczanie matematyki, nauczanie jej na wysokim poziomie są kluczami do rozwiązywania problemów światowej egzystencji i do planowania przyszłości. Również Micheal Porter, prof. Harvard Business School, zdecydowanie podkreśla, że zamożność narodów tworzy się, a nie dziedziczy ... Nie wyrasta ona z naturalnych bogactw kraju, jego siły roboczej, jego stóp procentowych ani z wartości jego waluty. Konkurencyjność gospodarki zależy dzisiaj bowiem przede wszystkim od zdolności jej przemysłu do innowacji, a tym samym do podnoszenia swojego poziomu. Można parafrazować i zaadoptować to stwierdzenie do przestrzeni edukacji matematycznej. **Jakość kształcenia matematycznego tworzy się, a nie dziedziczy!** Nauka i wiedza były i będą motorem postępu, rozwoju cywilizacyjnego i gospodarczego, a zaniedbywanie ich jest inwestowaniem w ignorancję. Aktualnie istnieje potrzeba promowania podejmowania studiów matematyczno-przyrodniczych i technicznych oraz podnoszenia jakości kształcenia matematycznego uczniów i studentów, w szczególności na studiach przygotowujących przyszłych nauczycieli matematyki.

Na przykład, do zawodu nauczyciela matematyki i informatyki sposobią się studenci matematyki specjalności nauczycielskiej na Wydziale Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza. W 2010 roku na piątym roku studiów matematycznych, ci studenci w toku realizacji programu seminarium z rozwiązywania zadań matematycznych, weryfikowali i doskonalili swoje kompetencje matematyczne i metodyczne oraz umiejętności w zakresie doboru zadań do celów i zadań lekcji, metod i sposobów ich rozwiązywania na danym poziomie edukacji matematycznej. Trzeba dodać, że ci studenci byli pierwszymi absolwentami gimnazjum z 2002 roku i szkoły ponadgimnazjalnej wprowadzonych w wyniku reformy systemu szkolnego, która w 1999 roku wprowadziła nową strukturę systemu oświaty. Poniżej zwrócimy uwagę na poniższy zestaw pięciu zadań rozwiązywany z nimi i pewne problemy metodyczne oraz trudności tych studentów w ich rozwiązywaniu.

Przykład 1: Udowodnić, że jeżeli pierwiastki równania $x^2 + px + q = 0$ są rzeczywiste, to pierwiastki równania $x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$ będą również rzeczywiste dla dowolnego rzeczywistego a.

To zadanie jest z zakresu programu matematyki szkoły ponadgimnazjalnej i okazało się być zadaniem ciekawym dla niektórych studentów z tej grupy seminaryjnej. Jego trudność tkwiła w tym, że zarówno jedno jak i drugie równanie zawiera parametry. Mimo, że ci studenci znali warunek na istnienie pierwiastków rzeczywistych każdego z tych równań, to jednak (ku mojemu zdziwieniu) niektórzy z nich nie potrafili poprawnie rozwiązać tego zadania dowodowego. A ich trudności i bezradność zaczynały się od momentu, gdy należało ustalić kiedy równanie $x^2+px+q+(x+a)(2x+p) = 0$ będzie miało pierwiastki rzeczywiste dla dowolnego rzeczywistego a. Otóż po wspólnym rozstrzygnięciu tej kwestii i otrzymaniu niezbędnej nierówności: $a^2 - ap + p^2 - 3q \geq 0$ nadal niektórzy studenci byli bezradni. Ich błąd polegał na tym, że tę nierówność postrzegali wyłącznie, jako nierówność stopnia drugiego zmiennej p z parametrem a (zamiast należało odwrotnie). Wówczas ta nierówność jest spełniona, gdy $a^2 - 4q \geq 0$. A ten warunek nie jest prawdziwy dla dowolnego rzeczywistego a i q. Brak elastyczności myślenia u tych studentów ograniczał im dostrzeżenie drogi do poprawnego sfinalizowania rozwiązania tego zadania dowodowego, która wiodła tu poprzez zmianę interpretacji otrzymanej nierówności: $a^2 - ap + p^2 - 3q \geq 0$.

Przykład 2: Porównać liczby 2^π i π^2.

To ćwiczenie wydawało się być dla studentów trywialne. Trafnie i kategorycznie stwierdzali: 2^π jest mniejsze od π^2, oczywiście po wykonaniu szacunkowych obliczeń bądź zastosowaniu kalkulatora. Ale ku mojemu zaskoczeniu okazali się być bezradni, aby samodzielnie i formalnie uzasadnić tę nierówność.
Przypuśćmy, że $2^\pi < \pi^2$.
Po wskazaniu im funkcji pomocniczej $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, dostrzegli drogę dowodu tego faktu. Ta funkcja na podstawie odpowiedniego twierdzenia jest malejąca dla $x > e$. Wówczas zauważyli, że zachodzi zależność: $\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}\ln 4 < \frac{\ln \pi}{\pi}$. A stąd $\frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln \pi}{\pi}$, czyli oczywistym staje się prawdziwość nierówności $2^\pi < \pi^2$.

Przykład 3: Rozwiązać równania: 1) $x^6 = 6^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$; 2) $\sin x + \sin y = \sin(xy)$, gdzie $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Studenci łatwo dostrzegli, że jednym z pierwiastków równania $x^6 = 6^x$ jest $x = 6$. Istnienie innych pierwiastków tego równania próbowali potwierdzić graficznie szukając odciętych punktów wspólnych wykresów funkcji $y = x^6$ i $y = 6^x$. Taka metodyka poszukiwania rozwiązania utwierdzała niektórych rozwiązujących w przekonaniu, że to równanie ma tylko 2 pierwiastki rzeczywiste, co było błędnym ich przekonaniem. Wówczas powstała naturalna potrzeba uwiarygodnić niepoprawność tej tezy. Innym, skutecznym sposobem poszukiwania rozwiązania tego zadania było rozwiązanie zadania pomocniczego: *zbadać przebieg zmienności funkcji $y = x^6 6^{-x}$ i udowodnić, że równanie $x^6 = 6^x$ ma dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste*. Dopiero ta metoda rozwiązania utwierdziła studentów w przekonaniu, że istotnie dane równanie ma tylko trzy pierwiastki rzeczywiste. W toku refleksji nad jego rozwiązaniem powstał problem: *jak wyznaczyć efektywnie pierwiastki tego równania*? To pytanie stanowiło dopełnienie procesu rozwiązania równania $x^6 = 6^x$. Studenci stosując odpowiednie aplikacje komputerowe podawali przybliżone wartości niektórych pierwiastków tego równania, na przykład: $-0,7898$; $1,6242$; 6. Chodziło tu jednak, aby wskazać efektywnie pierwiastki tego równania. W tym celu wystarczyło rozważyć funkcję pomocniczą $f(x) = xe^x$ dla $x > -1$ i wykazać istnienie doń funkcji odwrotnej g. Wówczas można już udowodnić, że pierwiastkami równania $x^6 = 6^x$ są liczby: 6, $-\frac{6}{\ln 6}g(\frac{\ln 6}{6})$, $-\frac{6}{\ln 6}g(-\frac{\ln 6}{6})$.

Poszukiwanie rozwiązania równania $\sin x + \sin y = \sin(xy)$, gdzie $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ okazało się być zadaniem nietypowym i trudnym dla studentów - przyszłych nauczycieli matematyki. Niektórym z nich udało się rozstrzygnąć, że to równanie nie ma rozwiązania w podanym zbiorze. *Oto dowód nie wprost tego faktu.* Przypuśćmy, że dane równanie ma rozwiązanie w podanym zbiorze. Wiadomo, że funkcja $f(x) = \sin x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ jest rosnąca i przyjmuje wartości tylko z przedziału $(0, 1)$. Zauważmy, że: jeśli $x \in (0, 1)$ lub $y \in (0, 1)$, to $\sin(xy) < \sin y$ lub $\sin(xy) < \sin x$. Czyli $\sin x < 0$ lub $\sin y < 0$, a to jest sprzeczność, bo $\sin x \in (0, 1)$ i $\sin y \in (0, 1)$. Dla pełności tego dowodu należy rozważyć jeszcze przypadek $x \in \langle 1, \frac{\pi}{2})$ i $y \in \langle 1, \frac{\pi}{2})$. Stąd $\sin(xy) = \sin x + \sin y > 2 \sin 1$, czyli $\sin(xy) > 2 \sin 1 > 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$, a to jest sprzeczność, bo $\sin(xy) \in (0, 1)$.

Przykład 4: a) Na ile części może podzielić prostą danych n jej punktów? b) Na ile części podzielą płaszczyznę danych n prostych, gdy żadne dwie z nich nie są równoległe i żadne trzy z nich nie przecinają się w jednym punkcie? c) Na ile części podzielą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ płaszczyzny zawarte we wszystkich ścianach sześcianu (czworościanu)?

To zadanie wzbudziło zainteresowanie studentów. Po wykonaniu odpowiednich rysunków dostrzegali bez trudu poprawne jego rozwiązanie w każdym z podpunktów. Zadanie 4a) i jego rozwiązanie było wskazówką do rozwiązania zadania 4b). Niektórzy z nich dostrzegli poprawne jego rozwiązanie: dane n prostych spełniających podane warunki podzielą płaszczyznę maksymalnie na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ części. Mieli jednak trudności z poprawnym jego uzasadnieniem. Co więcej, nie widzieli potrzeby przeprowadzenia tu dowodu indukcyjnego, bądź zarysowania takiego dowodu. Niech c_n oznacza liczbę części płaszczyzny, jakie powstaną z podziału jej przez dane n prostych, czyli $c_1 = 2$. Rozważmy teraz jeszcze jedną prostą l_{n+1}, która będzie miała n punktów przecięcia, po jednym z każdą z danych n prostych. Oczywiście każdy z tych n punktów podzieli prostą l_{n+1} na $n + 1$ odcinków, a każdy z tych odcinków podzieli jedną spośród $n + 1$ części płaszczyzny, w których zawiera się, na dwie części. Czyli otrzymuje się zależność: $c_{n+1} = c_n + n + 1$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $c_0 = 1$. A stąd ostatecznie: $c_n = c_{n-1} + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $c_0 = 1$.

Przykład 5: a) Na ile części mogą podzielić przestrzeń $\mathbb{R}^3$ dane n płaszczyzn, gdy żadne dwie z nich nie są równoległe do siebie, żadne trzy z nich nie są równoległe do pewnej prostej i żadne cztery z nich nie mają punktu wspólnego? b) Przy jakich warunkach dane n prostych (płaszczyzn) podzieli płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ (przestrzeń $\mathbb{R}^3$) na maksymalną ilość części? c) Udowodnić, że dane n płaszczyzn może podzielić przestrzeń $\mathbb{R}^3$ maksymalnie na $v(n,3)$ obszarów, przy czym $v(n,3) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ dla $n \in \mathbb{N}$. d) Uogólnić wzór $v(n,3)$ i udowodnić go dla n hiperpłaszczyzn przestrzeni $\mathbb{R}^k$ dla $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ oraz przyjąć, że $C_n^k = 0$, gdy $k > n$.

Powyższe zadania 4a)–4c) i 5a)–5d) są o fabule geometrycznej, przy czym każde następne jest przedłużeniem bądź uogólnieniem poprzedniego. Są one swoistą serią ćwiczeń o wzrastającym stopniu trudności, która może być wykorzystana do diagnozowania u uczniów i studentów poziomu rozwoju wyobraźni geometrycznej i przestrzennej oraz ich wiedzy i umiejętności rozwiązywania zadań między innymi z zakresu geometrii, kombinatoryki i algebry. Przy ustalonym n można odkryć rozwiązanie niektórych z tych ćwiczeń, po czym rozwiązujący je mogą dostrzec i wyznaczyć odpowiedni rekurencyjny wzór $v(n,3)$ opisujący to rozwiązanie dla dowolnego $n \in N$. Zadanie 5d) polecane może być tylko studentom. Rozwiązanie zadań 5c) i 5d) wymaga sformułowania warunków ogólnego położenia danych n płaszczyzn w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (bądź n hiperpłaszczyzn w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ dla $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$) i podania dowodu wzoru $v(n,3)$, a także jego uogólnionej wersji, czyli sformułowania tu wzoru $v(n,k)$. Z poprawnym rozwiązaniem tych zadań moi studenci – przyszli nauczyciele matematyki mieli trudności, a szczególnie ze sformułowaniem wzoru na $v(n,k)$ i jego dowodem.

W procesie rozwiązywania powyższych i innych zadań można wykorzystywać kalkulatory bądź programy komputerowe. Obserwuje się jednak swoisty konserwatyzm i powściągliwość u nauczycieli matematyki w szkołach i na uczelniach do wykorzystywania komputerów, TI i zasobów Internetu w praktyce nauczania matematyki. Czy jednak uczeń, student, współczesny nauczyciel przekonany jest o potrzebie i zasadności wykorzystywania matematycznych pakietów komputerowych i TI w procesie nauczania matematyki? Do tego wątku będzie nawiązywać dalsza część tej pracy.

5. Wyzwania nowoczesnego nauczania matematyki

Z przeprowadzonych badań młodzieży Uniwersytetu Warszawskiego wynika, że tylko 19% uczniów uznaje nauczycieli za ważne źródło wiedzy, natomiast aż 77% uczniów twierdzi, że więcej dowiadują się od swoich kolegów i z Internetu, zob.: Z. Nowakowski (2009). Znamienne jest to, że istotne dla funkcjonowania w erze cyfrowej umiejętności rozwijane są przez uczniów w sieci, poza szkołą. Uczniowie samodzielnie kształcą i doskonalą w ten sposób innowacyjność, współpracę i komunikację, aktywne eksperymentowanie i posługiwanie się najnowszą technologią informacyjno-komunikacyjną oraz metodykę rozwiązywania problemów. Tę grupę młodych ludzi, uczniów i studentów nazywa się współcześnie *Net Generation, Internet Generation, iGeneration, pokoleniem Milenium, pokoleniem cyfrowym, pokoleniem sieci*, zob.: S. Dylak (2009). Są oni najczęściej całkowicie zafascynowani i zanurzeni w TI i jej możliwościach. Przyzwyczajeni są do korzystania z mediów, programów komputerowych i TI. Co więcej, obserwuje się u nich wyraźnie charakterystyczny styl uczenia się, myślenia i komunikacji. Na przykład, wielozadaniowość i szybkość jest integralną częścią życia pokolenia sieci. Jak twierdzi Don Tapscott (2008) to pokolenie nie tylko słucha innej muzyki i ogląda inne filmy niż ich nauczyciele, ale przede wszystkim korzysta z innych narzędzi do komunikacji, zarówno w sensie technicznym, jak i symbolicznym. W dużej mierze zerwaniu ulega przez to transmisja międzypokoleniowa – współczesna szkoła zamiast być narzędziem modernizacji, staje się niekiedy jej hamulcem. Stąd potrzeba i konieczność zmiany, unowocześnienia sposobu uczenia zainicjowanego przez samych nauczycieli. O ile prawie wszyscy uczniowie świetnie sobie radzą z poruszaniem się po Internecie, o tyle trudniej jest im z informacji zdobytych w Internecie, bądź z pomocą programów komputerowych lub TI zgłębiać i systematyzować nabywaną wiedzę lub tworzyć nową wiedzę. Nauczyciele powinni być kompetentni i pomocni tu do organizowania przestrzeni edukacyjnej uczniów i studentów z wykorzystaniem nowoczesnych metod i narzędzi pracy, w szczególności w procesie ich kształcenia matematycznego.

Rola i walory oraz ograniczenia związane z wykorzystywaniem kalkulatorów graficznych, komputera, TI i Internetu w nauczaniu i uczeniu się matematyki nadal nie są wystarczająco mocno artykułowane bądź promowane w programach nauczania matematyki, a zwłaszcza w pakietach edukacyjnych dla ucznia i dla nauczyciela oraz w opracowaniach metodycznych i literaturze z dydaktyki matematyki. Ta nowa technologia kształcenia uczniów i studentów może pełnić dla nich funkcje poznawcze, heurystyczne, kontrolne, bądź emocjonalnomotywacyjne i aktywizujące. I nadal problemem nowoczesnego nauczania matematyki jest wzbogacanie, doskonalenie i promowanie zarówno praktyki wspomagania tego kształcenia, jak również wszelkich zajęć dydaktycznych z matematyki z wykorzystaniem komputera i TI. Tym niemniej, w polskich środowiskach szkolnych i czynnych nauczycieli matematyki wzrasta zaufanie do tej nowoczesnej technologii nauczania i przekonanie, że na lekcjach matematyki, zajęciach indywidualnych, pozalekcyjnych i wyrównawczych z matematyki komputer może i powinien być wykorzystywany jako: 1) pomoc dydaktyczna, czyli urządzenie wspomagające proces kształcenia matematycznego uczniów, 2) urządzenie zintegrowane z metodami informatyki i z narzędziami TI, które mogą służyć do wzbogacenia i rozszerzenia stosowania klasycznych metod nauczania matematyki. Ten umiarkowany optymizm wzmacniają również wyniki prac badawczych z tego zakresu: E. Juskowiak (2004), H. Kąkol i T. Ratusiński (2004), A. Rybak (2001), R. Wojtuś (2008) i innych autorów. Z drugiej strony, zarówno szkoły, uczelnie jak i nauczyciele matematyki muszą rozumnie i rozsądnie wykorzystywać potencjał tej nowej technologii oraz jednocześnie nauczyć tego samego swoich uczniów i studentów. I jednocześnie muszą mieć świadomość, że „nasycanie" kształcenia matematycznego TI, Internetem, e-learningiem generuje „homo computericus". Może to powodować również negatywny wpływ na środowisko ucznia, studenta i dyskredytować w tym kształceniu potrzebę matematycznych uzasadnień. Chodzi tu jednak, by nie porzucać tej technologii i nie rezygnować z niej, a skoncentrować się na skutecznym ulepszeniu stosowania jej i dotychczasowej dydaktyki kształcenia matematycznego.

6. Uwagi i refleksje końcowe

Temat i problematyka tej pracy są rozwojowe i wpisują się w interesujące pole badawcze dydaktyki matematyki, które określa się jako: ***problemy nauczania matematyki w XXI wieku w różnych krajach i tradycjach kulturowych***. Jej opracowanie rzuciło światło na wyzwania, innowacje i niektóre problemy współczesnego nauczania matematyki oraz wpływ bolońskiego procesu na kierunki reformy i modernizację matematycznego kształcenia w Polsce. I odsłoniło również nowe idee i tendencje w tym zakresie oraz doświadczenia i trudności z realizacji podjętych u nas zadań. W opracowaniu tego tematu nawiązałem do tradycji i potrzeby konstruktywnej współpracy matematyków i dydaktyków matematyki w rozwiązywaniu problemów kształcenia matematycznego uczniów i studentów, w szczególności nauczycieli matematyki. Do kluczowych problemów zaliczam m.in. takie jak: 1) problemy diagnozowania i monitorowania jakości kształcenia matematycznego uczniów i studentów, 2) problemy i doświadczenia dotyczące obowiązkowej matury z matematyki, 3) problemy, innowacje i doświadczenia ze stosowania programów komputerowych i TI w matematycznym kształceniu uczniów i studentów.

Wyniki przeprowadzonej analizy literatury i opisane wątki pracy, analizowane i wskazane w niej aktualne problemy nauczania matematyki pozwoliły wskazać następujące wnioski do pracy dydaktycznej z uczniami i studentami – przyszłymi nauczycielami matematyki:

1) Uczyć uczniów (studentów) matematycznego reagowania i przymuszać ich różnymi sposobami do matematycznego myślenia, w szczególności poprzez: a) zróżnicowany dobór zadań matematycznych i zróżnicowaną metodykę ich rozwiązywania, np.: rozwiązywanie wielu zadań jedną metodą, a także odwrotnie bądź z wykorzystaniem komputera, b) przykłady i dobrze dobrane ćwiczenia i zadania. Ma tu zastosowanie tw. I. M. Gelfanda: *teorie przychodzą i odchodzą,* *ale przykłady zostają*. Co więcej, jak mówi przysłowie: słowa uczą, przykłady pociągają. Należy także kształcić i rozwijać aktywności matematyczne oraz m.in. takie cechy uczniów i studentów jak: pomysłowość, elastyczność i oryginalność myślenia, zdolność do abstrahowania i uogólniania.

2) Dydaktykę nauczyciela matematyki powinno cechować: profesjonalizm, jasność argumentacji i prezentacji realizowanych treści oraz porządek organizacyjny, umiejętność dostosowania się do poziomu i oczekiwań słuchaczy oraz umiejętność wskazania adekwatnej literatury przedmiotu i materiałów pomocniczych dla uczniów i studentów, a także dostępność nauczyciela do bezpośredniej rozmowy w czasie konsultacji. W jego pracy dydaktycznej i kontaktach z uczniami (studentami) powinna być wykorzystywana TI oraz materiały dydaktyczne opracowane w wersji elektronicznej oraz stworzone możliwości dostępu do pracowni komputerowej i programów edukacyjnych, wspomagających grafikę i wizualizację nabywanej wiedzy przedmiotowej.

Literatura

[1] Arends R. I.: 1995; *Uczymy się nauczać*, WSiP, Warszawa.

[2] Arzarello F.: 2005; *Technology and mathematics in the classroom: lights & shadows*, Proc. CIEAEM 57 Piazza Armerina, Italy.

[3] Dylak S.: 2009; *Nauczyciel wobec uczniowskiego uwikłania w sieci*, http://www.ckp.edu.pl/konferencja/wyklady.html.

[4] Gwozdowska A.: 2009; *Matematyka ma być trendy*, Polska – Internetowe wydanie dziennika ogólnopolskiego z 06-08-2009.

[5] Freudenthal H.: 1989; *Błędy nauczyciela – analiza dydaktyczna samego siebie*, Dydaktyka Matematyki 11, s. 109–115.

[6] Иванов О. А.: 2009; *Елементарная математика дла школников студентов и преподавателей*, Изд. МЦНМО Москва.

[7] Juskowiak E.: 2004; *Analiza prac uczniów z kalkulatorem graficznym podczas rozwiązywania zadań* (*fragment badań*), Dydaktyka Matematyki 26, s. 95–118.

[8] Karp A. & Vogeli B. R.: 2010; *Russian Mathematics Education* (*History and World Significance*), Series on Mathematics Education, Vol. 4, World Scientific, p. 1–387.

[9] Kąkol H., Ratusiński T.: 2004; *Rola komputera w procesie rozwiązywania matematycznych zadań*, Dydaktyka Matematyki 26, s. 119–142.

[10] Колягин Ю. М. и савт.: 2009; Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособе, Чебоксары Изд-во Чубаш. ун-та, 732 с.

[11] Kordos M.: 2009; *Zobaczyć to czego nie widać, czyli kultura matematyczna w praktyce*, Wydawnictwo „Aksjomat”, Toruń, s. 1–177.

[12] Kordos M.: 2010; *Feliks Klein* 1849-1925, Matematyka 1, s. 3–7.

[13] Krygowska Z.: 1984; *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych*, WN WSP Kraków, t. 46, s. 1–288.

[14] Lakatos I.: 1976; *Proofs and Refutations*, Cambrigde.

[15] Legutko M.: 2006; *Analiza porównawcza wyników badania matematycznych umiejętności 16-latków w programie PISA i w egzaminie gimnazjalnym z roku* 2003, Dydaktyka Matematyki 29, s. 63–113.

[16] Nowakowski Z.: 2009; *Nowa edukacja dla pokolenia sieci, czyli e-podręczniki na platformie edukacyjnej*, http://www.ap.krakow.pl/ktime/ref2009/nowakows.pdf.

[17] Pardała A.: 1995; *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki* (*Teoria, problemy, propozycje*), WO FOSZE Rzeszów, s. 1–252.

[18] Pardała A.: 2000; *Wybrane problemy komputerowego wspomagania kształcenia matematycznego*, w: Materiały konferencji naukowej „Pedagogika i Informatyka, Cieszyn'2000”, Uniwersytet Śląski, Filia w Cieszynie, s. 135–144.

[19] Rybak A.: 2001; *Komputer na lekcjach matematyki w szkole średniej*, Wydawnictwo Podkowa Bis, Gdańsk.

[20] Sharygin I. F. (Шарыгин И. Ф.): 2000; *Two articles and two hundred problems*, p. 71, maszynopis udostępniony przez autora A. Pardała.

[21] Tapscott D.: 2008; *Grow up digital: how the net generation is changing your world?*, http://dontapscott.com/books/grown-up-digital/

[22] Thom R.: 1974; *Czy istnieje matematyka nowoczesna?*, Wiadomości Matematyczne, t. XVIII.

[23] Thom R.: 1974; *Matematyka „nowoczesna” – pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?*, Wiadomości Matematyczne, t. XVIII.

[24] Taylor P. J.: 2003; *Occasional Address of Doctor Honoris Causa Prof. Peter James Taylor*, Proc. of the Third International Conference: Creativity in mathematics education of gifted students, ICCME & EGS'2003, Rousse, Bulgaria, p. 19–22.

[25] Tezy raportu o edukacji matematycznej w Polsce, Wiadomości Matematyczne XXIX.1, PWN, Warszawa.

[26] Wojtuś R.: 2008; *Koniec lekcji i co dalej? Jaka jest rola komputera w pozalekcyjnej pracy ucznia?*, Współczesne problemy nauczania matematyki 1, Prace monograficzne z dydaktyki matematyki, Forum Dydaktyków Matematyki, Bielsko Biała, s. 199–210.

[27] Wuczyńska K.: 2010; *Feliksa Kleina wizja nauczania matematyki*, Matematyka 1, s. 8–13.

About some problems of present mathematics teaching process

Summary

Mathematics education has been subject to changes because of circumstances in which it was developed and improved. The directions of those changes have been set through the modern education concepts and they naturally result from transformation of social and economic conditions that took place in particular country or region. Specifically, the directions of changes are integrally related to developing, updating and improving of pupils' and students' teaching mathematics process. They are accompanied with balance between two tendencies. On the one hand it is all about keeping mathematics' traditional core, its educational and applicative qualities and on the other hand it is about cautious development of mathematics content, its teaching methods and ways of pupils' and students' activities. The author of this article has elaborated on this subject from the perspective of recommendations and critical analysis of selected current literature, practical tasks and ways of those tasks' exercising as well as experiences with students of mathematics, preparing themselves for being teachers. At the end, the author presented remarks and reflections regarding computer programs and IT technology being used in teaching mathematics.

Key words and phrases: challenges and problems of present mathematics teaching process, mathematics teaching methods, ways of pupils' and students' activities.
2000 Mathematics Subject Classification. Primary 97-02, 97D10

Autor pracuje w Politechnice Rzeszowskiej im. I. Łukasiewicza