

Bronisław Pabich (Wieliczka)

Analogie i różnice geometrii 2D i 3D

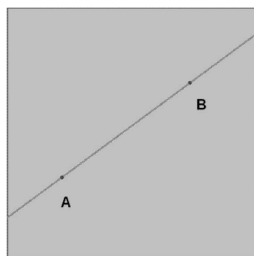
Analogie w nauczaniu matematyki wnoszą wiele wartości dydaktycznych. Są z jednej strony źródłem swobodnej twórczości i odkryć matematycznych, mogą być źródłem rozumowania o wiele bardziej uniwersalnego od dedukcji i wreszcie przez stosunkowo dużą możliwość popełnienia błędu wyrabiają postawę ostrożności i samokontroli (Turnau, 2007).

Nauczanie geometrii przestrzennej jest dla nauczyciela dobrą okazją do ponownego przejrzania nauczanej wcześniej planimetrii i rozszerzenia przez analogię wielu jej zagadnień. Fakt, że niektóre dobrze znane uczniowi pojęcia, twierdzenia lub metody obliczeniowe nie „przenoszą” się na przestrzeń trójwymiarową może być powodem jego zdziwienia i zaciekawienia.

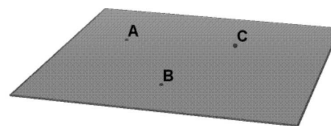
Gdzie należy poszukiwać analogii przestrzeni 2D i 3D? Na pewno w pojęciach podstawowych planimetrii/stereometrii:

- punkty na płaszczyźnie przechodzą w punkty w przestrzeni, niekiedy w szczególne proste;
- proste na płaszczyźnie przechodzą w proste w przestrzeni, niekiedy w szczególne płaszczyzny;
- boki wielokąta to krawędzie wielościanu lub odpowiednie jego ściany.

Źródłem poszukiwań analogii mogą być również aksjomaty planimetrii/stereometrii. Na przykład aksjomat: *przez dwa punkty płaszczyzny można przeprowadzić jedną prostą*, ma swój odpowiednik w przestrzeni: *przez trzy punkty nie leżące na jednej prostej w przestrzeni przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna* (rys. 1, rys. 2).

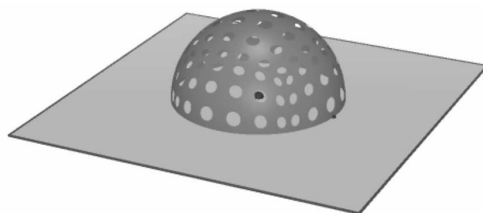


Rys. 1



Rys. 2

Podstawowe konstrukcje planimetrii również prowokują do przeprowadzania analogicznych konstrukcji w przestrzeni 3D. I tak konstrukcja okręgu o zadanym środku, przechodzącym przez dany punkt przenosi się na konstrukcję sfery (rys. 3).



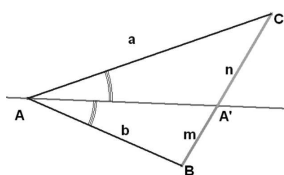
Rys. 3

Program komputerowy CABRI 3D dysponuje narzędziami pozwalającymi poszukiwać analogii lub potwierdzać ich brak. Takimi narzędziami są: *Cyrkiel przestrzenny* – narzędzie „sfera” i *Linijka* – narzędzie „prosta”. Narzędzia te mogą stać się niezwykle przydatne przy poszukiwaniu analogii między twierdzeniami w planimetrii i twierdzeniami w stereometrii.

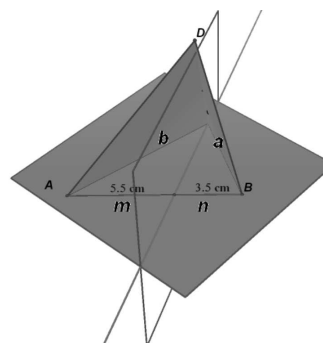
Analogie niektórych twierdzeń nasuwają się automatycznie. Dla przykładu znane twierdzenie o dwusiecznej kąta w dowolnym trójkącie przenosi się w naturalny sposób na czworościan (rys. 4, rys. 5). Teza tego twierdzenia (rys. 4) znana w planimetrii jako proporcja:

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a},$$

brzmi analogicznie w przestrzeni 3D (rys. 5).

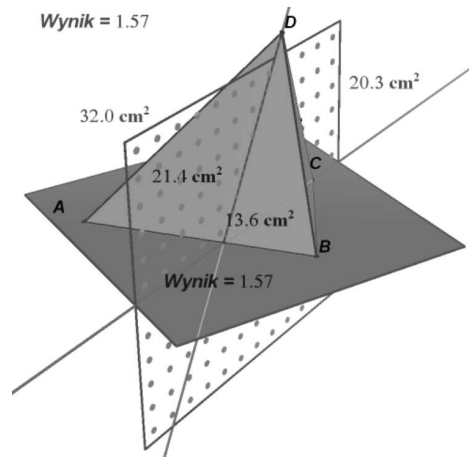


Rys. 4



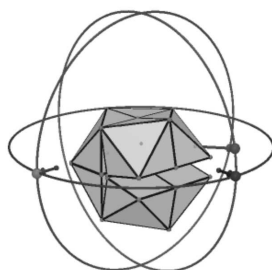
Rys. 5

Po dalszych „badaniach” można odkryć proporcję, nie tylko długości boków trójkąta, ale również pól odpowiadających sobie ścian czworościana (rys. 6). Ta własność na ogół nie jest znana, o ile jest w ogóle znana.

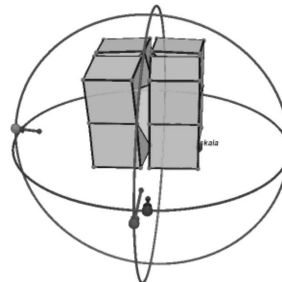


Rys. 6

Czy analogie można zastosować w odwrotnym kierunku – od 3D do 2D? Poszukajmy na płaszczyźnie odpowiednika rozkładu sześcioościanu w sześćian przez obrót jego segmentów (rys. 7, rys. 8).

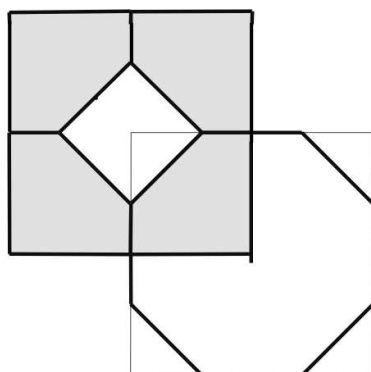


Rys. 7



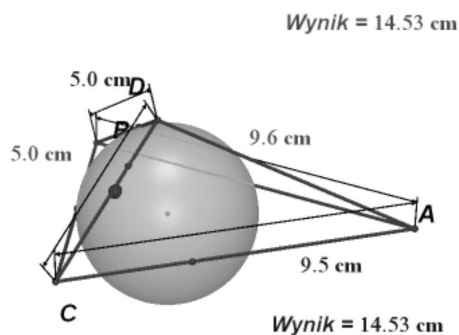
Rys. 8

Z trudnością doszukujemy się podobnej sytuacji w planimetrii, choć to nie całkiem jest analogia, gdyż w sześciu znajdował się ośmiościan foremny, a tymczasem w kwadracie zamiast ośmiokąta otrzymujemy również kwadrat (rys. 9).



Rys. 9

Innym przykładem jest kula styczna do krawędzi czworościanu, która nie ma odpowiednika w planimetrii, gdyż koło stykające się z bokami trójkąta, to po prostu koło wpisane. Wszystko to za sprawą dwóch odpowiedników boku płaskiego wielokąta: krawędzi wielościanu i jego ścian. Badając tę analogię można odkryć, że kula taka jest styczna do krawędzi czworościanu, jeśli suma długości skośnych krawędzi czworościanu jest taka sama (rys. 10).

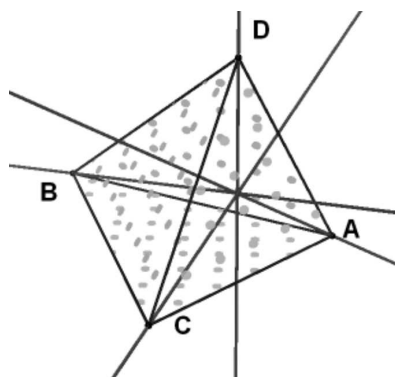


Rys. 10

Czy zawsze istnieją analogie z przestrzeni 2D w 3D?

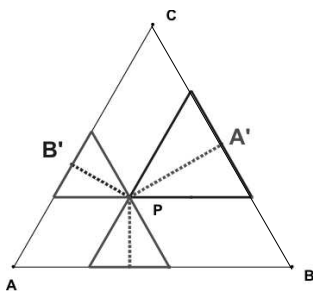
Wiadomo, że wysokości trójkąta przecinają się zawsze w jednym punkcie. Mówimy, że trójkąt jest zawsze ortocentryczny. Czy tak jest faktycznie dla dowolnego czworościanu? Jeśli nie, to kiedy czworościan jest ortocentryczny? Czy tylko wtedy, gdy jest foremny? Na te pytania można sobie odpowiedzieć wykonując eksploracje tego zagadnienia z programem CABRI 3D. Okazuje się, że czworościan jest ortocentryczny, gdy jego dwie pary skośnych krawędzi

są do siebie prostopadłe. Wówczas również trzecia para też jest prostopadła (rys. 11).

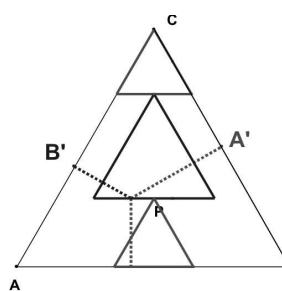


Rys. 11

Ładnie natomiast przenosi się twierdzenie o punkcie wnętrza trójkąta równobocznego. Suma jego odległości od boków trójkąta jest zawsze taka sama i równa wysokości trójkąta równobocznego. Dowód przeprowadzamy sumując pola trzech trójkątów, dla których odległości punktu P od boków są wysokościami. Podobnie rzecz się ma z punktem wewnętrznym czworościanu foremego. Dowód też jest analogiczny. Rysunki 12 i 13 ilustrują konstrukcję dynamiczną CABRI, dzięki której można odkryć pierwsze z tych twierdzeń. Za pomocą suwaka układamy trzy trójkąty jeden na drugim. Suma poszukiwanych odległości $PA' + PB' + PC'$ okazuje się być wysokością trójkąta.



Rys. 12



Rys. 13

Czasami przy poszukiwaniu analogii twierdzeń i pojęć w przestrzeni 2D na analogiczne w przestrzeni 3D wprowadzamy nowe pojęcia. Poszukując na przykład twierdzenia Pitagorasa w przestrzeni wprowadzamy klasę czworościanów trójkątnych. Ich trzy ściany są trójkątami prostokątnymi. Wówczas suma kwadratów pól tych ścian jest równa kwadratowi pola czwartej ściany takiego czworościanu.

Najpierw zaczynijmy od czworościanu prostokątnego wpisanego w sześcián. Łatwo wykazać, że

$$P_{ABA'}^2 + P_{ABD}^2 + P_{ADA'}^2 = P_{BDA'}^2.$$

Lewa strona wynosi:

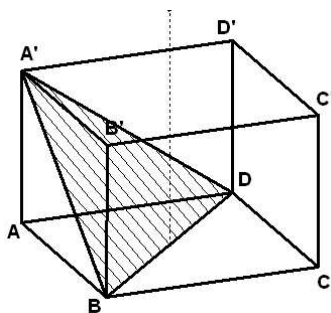
$$\left(3 \cdot \frac{a^2}{2}\right)^2 = \frac{3a^4}{4},$$

prawa zaś

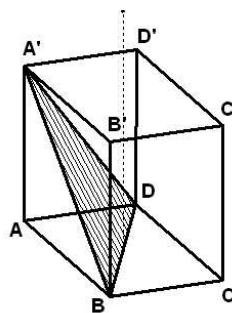
$$\left(\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3a^4 \cdot 4}{16} = \frac{3a^4}{4},$$

co kończy dowód.

Okazuje się, że teza twierdzenia przenosi się na każdy inny czworościan, byle był prostokątny (rys. 15). Dowód tego faktu jest jednak trudniejszy.

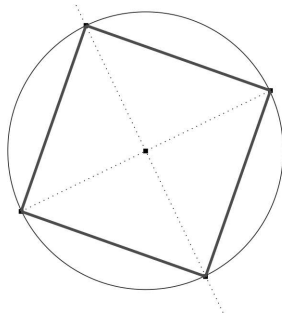


Rys. 14

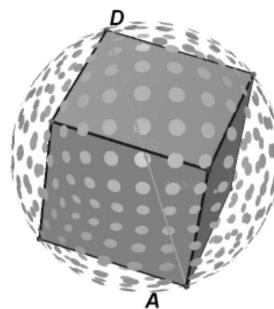


Rys. 15

Analogie mogą nieraz sprawić niemały kłopot. Na przykład konstrukcja kwadratu wpisanego w koło jest niezwykle prosta, ale wpisanie sześciánu w kulę nastrocza sporo trudności. Konstrukcja ta została opisana w czasopiśmie NiM+TI (Pabich, 2009).

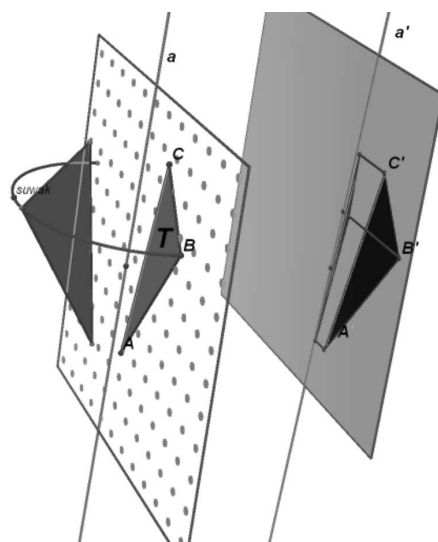


Rys. 16



Rys. 17

Analogie czasami pozwalają lepiej zrozumieć istotę pojęcia w planimetrii. Na przykład można łatwo dostrzec, że symetria osiowa jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę obrotu w przestrzeni wokół osi równoległej do tej płaszczyzny. Rzutem tej osi obrotu jest oś symetrii (rys. 18).

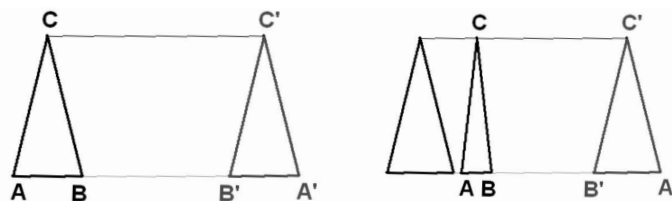


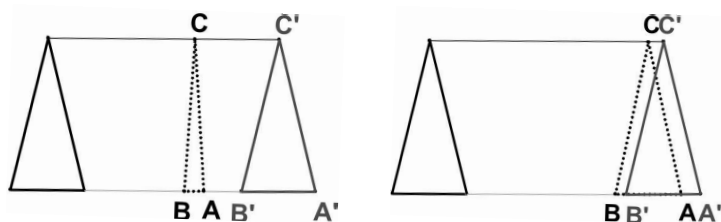
Rys. 18

Teraz można przekonać się, jak niepoprawne jest wprowadzanie w szkole podstawowej symetrii osiowej przez wykonywanie zgięcia kartki, na której wcześniej zrobiono kleksa.

Zagięcie kartki to właśnie obrót, a mimo, że obrazem tego kleksa po zagięciu jest jego obraz w symetrii na tej kartce, to nie wolno powiedzieć, że zaginanie kartki jest symetrią osiową. Uczeń widząc czynność nauczyciela zapamiętuje na zawsze zagięcie kartki i kojarzy je z symetrią osiową.

Potem, gdy widzi dynamiczną konstrukcję „fizycznego” tworzenia obrazu trójkąta w symetrii osiowej (rys. 19), w którym punkt A pokonując w tym samym czasie dłuższą drogę niż punkt B , nie rozpoznaje w tej konstrukcji symetrii osiowej lecz mówi, że jest to obrót. Na rysunku 19 poniżej widzimy cztery wybrane fazy tej dynamicznej konstrukcji.



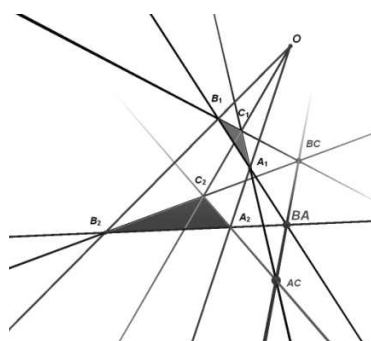


Rys. 19

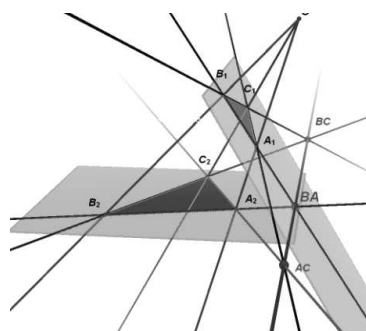
Wykonany w przeszłości przez nauczyciela eksperyment na długo pozostaje w pamięci ucznia i nie pozwala mu oderwać uwagi od zagięcia kartki i spojrzeć na inne cechy dynamicznej konstrukcji na ekranie CABRI, pozwalające natychmiast rozstrzygnąć, że mowa jest o symetrii osiowej.

Analogie mogą być wykorzystywane w dowodzeniu twierdzeń w przestrzeni dwuwymiarowej.

Pierwszy przykład to twierdzenie Desargues'a, które nie jest takie oczywiste na płaszczyźnie. Jeśli jednak spojrzymy na nie, jako na rzut pewnej sytuacji przestrzennej, natychmiast staje się bardziej oczywiste.



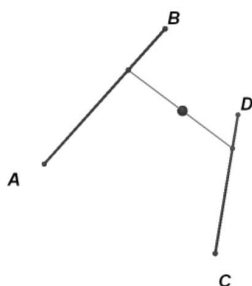
Rys. 20



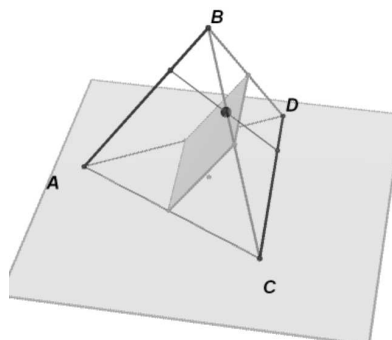
Rys. 21

Jeżeli dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$ są tak ułożone, że proste A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie O , wówczas punkty przecięcia par prostych: B_1C_1 i B_2C_2 , A_1B_1 i A_2B_2 oraz C_1A_1 i C_2A_2 też leżą na jednej prostej. Gdy dorysujemy płaszczyzny tak jak na rysunku 21, wówczas dowód twierdzenia staje się oczywisty. Poszukiwana prosta to krawędź obu płaszczyzn.

Drugi przykład, to zadanie M. Ciosek, opisane szczegółowo w jej pracy doktorskiej. Problem polega na znalezieniu śladu, jaki wykreśli na płaszczyźnie środek odcinka, którego końce „ślizgają” się po dwóch dowolnych odcinkach AB i CD . Poszukiwany ślad to brzeg i wnętrze równoległoboku, którego wierzchołki są środkami odcinków AC , BD , AD i BC (rys. 22).



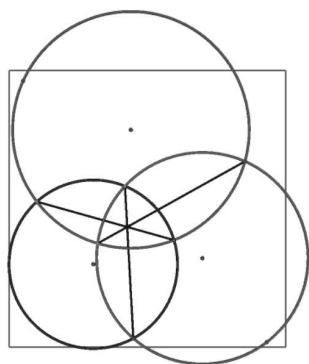
Rys. 22



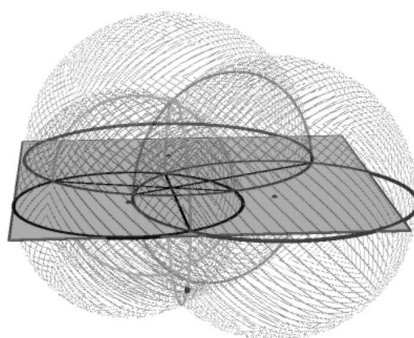
Rys. 23

Wystarczy jednak dorysować odpowiednią płaszczyznę (rys. 23) i widzimy natychmiast, że dane odcinki to krawędzie skośne pewnego czworościanu, a poszukiwany równoległobok to nic innego, jak przekrój tego czworościanu. W czworościanie foremnym będzie to oczywiście kwadrat, ale i tak jego rzut widzimy w postaci równoległoboku.

Oto inne interesujące „dowody” twierdzeń geometrii płaskiej za pomocą ich trójwymiarowych rzutów. Pierwszy z nich pokazuje, że gdy trzy okręgi przecinają się wzajemnie parami, to wspólne cięciwy tych par okręgów przecinają się w jednym punkcie (rys. 24). Fakt ten jest natychmiast widoczny, jeśli dorysujemy trzy kule, których przekrojami z wybraną płaszczyzną są wykreślone okręgi. Kule przecinają się w jednym punkcie, których rzut należy do rzutu każdej z trzech ciętyw, co oznacza, że cięciwy te przecinają się w jednym punkcie (rys. 25).



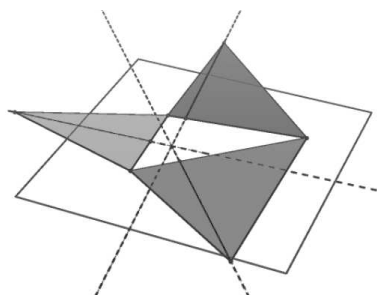
Rys. 24



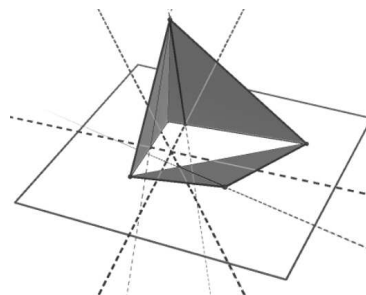
Rys. 25

Kolejny przykład polega na zbudowaniu na bokach dowolnego trójkąta trójkątów w ten sposób, by każdy dorysowany bok trójkąta był przystający do boku trójkąta sąsiedniego (rys. 26). Okazuje się, że wysokości dorysowanych

trójkątów przecinają się w jednym punkcie. Dowód tego faktu jest bardzo prosty – wystarczy dorysowane trójkąty obrócić w przestrzeni 3D wokół boków trójkąta bazowego tak, by wszystkie cztery trójkąty stanowiły ściany zbudowanego w ten sposób czworościanu (rys. 27).



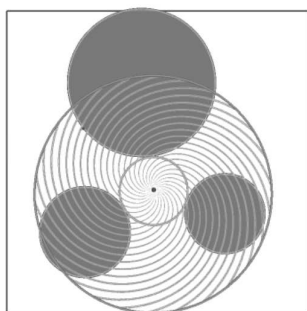
Rys. 26



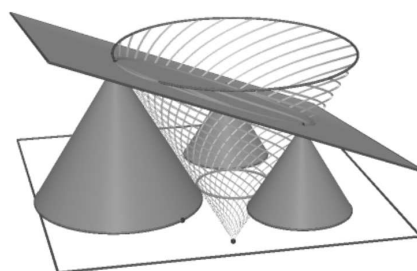
Rys. 27

Każda z wysokości obracanych trójkątów opuszczonych na odpowiedni bok trójkąta bazowego w trakcie obrotu zawiera się w płaszczyźnie prostopadłej do boków trójkąta bazowego, a po zbudowaniu czworościanu staje się wysokością ściany tego czworościanu (apotemą). Jej rzut na podstawę czworościanu zawiera się w krawędzi przecięcia tej płaszczyzny z podstawą czworościanu. Rzut wierzchołka tego czworościanu na płaszczyznę podstawy jako punktu przecięcia się trzech apotem jest więc punktem wspólnym jej rzutów, czyli wysokości dobudowanych trójkątów.

Ostatnie powiązanie geometrii 2D z 3D ilustruje znany od starożytności problem Apolloniusza polegający na konstrukcji okręgu stycznego do trzech danych okręgów. Znane dotychczas rozwiązanie polega na zastosowaniu inwersji względem okręgu, w wyniku której dwa z trzech okręgów przejdą w prostą. Wówczas zadanie sprowadza się do konstrukcji okręgu stycznego do dwóch prostych i okręgu. Można jednak spojrzeć na ten problem nieco inaczej. Proponuje go matematyk A. F. Kabeliszwili (1996).



Rys. 28



Rys. 29

Traktuje on trzy dane okręgi jako przekroje trzech stożków o tworzących nachylonych do płaszczyzny przekroju pod tym samym kątem. Wówczas czwarty, poszukiwany okrąg jest przekrojem czwartego stożka o tym samym kącie nachylenia tworzącej do płaszczyzny przekroju, stycznego do pozostałych trzech. Problem polega na skonstruowaniu tego stożka.

Już tych kilka wybranych przykładów pokazuje, że poszukiwanie analogii pojęć i twierdzeń w geometrii 2D i w geometrii 3D z wykorzystaniem programu komputerowego Cabri może być interesujące i inspirujące dla uczniów.

Literatura

- [1] Khabelishvili, A.V.: 1996, Russian Journal Istoriko-matematicheskije Issledovaniya seria 2, vol. 1 (36), numer 2.
- [2] Pabich, B.: 2009, *Kwadrat w kole a sześciąt w kuli*, Nim+Ti nr 70.
- [3] Turnau, S.: 2007, *O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole*, www.up.krakow.pl/mat/dydaktyka/dm23/turnau.htm

*Autor pracuje w Liceum Ekonomicznym
w Wieliczce*

