Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Zbigniew Powązka (Kraków)

Uwagi o kształtowaniu rozumienia pojęcia miary na różnych poziomach edukacji

Wstęp

Jedną z ważnych form działalności człowieka jest mierzenie. Pojawia się ona w życiu codziennym podczas wyznaczania odległości, czasu, wymierzania powierzchni mieszkania, domu lub działki, objętości naczynia itp. We wszystkich tych przypadkach należy posłużyć się pojęciem miary.

Jest ono bardzo ważnym pojęciem matematycznym i znajduje zastosowanie np. w geometrii, rachunku prawdopodobieństwa, analizie matematycznej. W analizie przez miarę rozumie się nieujemną, rzeczywistą funkcję określoną na $\sigma-$ ciele zbiorów pewnej przestrzeni. Funkcja ta przyjmuje wartość zero na zbiorze pustym i jest przeliczalnie addytywna na każdym przeliczalnym ciągu zbiorów parami rozłącznych należących do tego $\sigma-$ ciała (Kołodziej, 1978, s. 267; Łojasiewicz, 1973, s. 88; Sikorski, 1969, s. 249).

Tak rozumiane pojęcie miary stanowi uogólnienie takich pojęć, jak na przykład: długość odcinka, pole powierzchni figury płaskiej i objętość bryły, które na poziomie przeddefinicyjnym są opracowywane w szkole podstawowej, gimnazjum lub szkole pogimnazjalnej.

Definicję miary poznają studenci studiów matematycznych podczas wykładów z analizy matematycznej.

W nauczaniu matematyki pojęcie miary budowane jest poczynając od miary Jordana, poznawanej bardziej czy mniej świadomie przez zdecydowaną większość dzieci i młodzieży, do miary Lebesgue'a, z którą zaznajamiają się przede wszystkim studenci studiów matematycznych.

Odnotujmy w tym miejscu, że wspomniana tu miara Jordana to nieujemna, rzeczywista funkcja określona na rodzinie zbiorów pewnej przestrzeni, przy czym rodzina ta jest zamknięta na skończone sumowanie mnogościowe. Ponadto funkcja ta jest addytywna na zbiorach parami rozłącznych z tej rodziny oraz ma własność niezmienniczości względem przesunięcia. Z uwagi na geometryczne zastosowania przyjmuje się także, że istnieje niepusty zbiór z dziedziny, którego miara wynosi 1 (Moszner, 1961, s. 15; Siwek, 2005, s. 66). Tak rozumiana miara Jordana nie stanowi szczególnego przypadku ogólnej definicji miary, jakim jest miara Lebesgue'a. Mimo tego każdy zbiór mierzalny w sensie Jordana jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i obie miary tego zbioru są równe.

Proces kształtowania tych pojęć jest długotrwały i wymaga na każdym poziomie edukacji wielu zabiegów dydaktycznych.

W. Nowak w swej monografii (1989, s. 244) przedstawiła następujące zalecenia, o których należy pamiętać przy kształtowaniu każdego pojęcia matematycznego, a w szczególności pojęcia miary: *Elementarne pojęcia matematyczne kształtują się w nauczaniu na ogół na drodze nieformalnej i nie zawsze są zorientowane na określoną definicję matematyczną. Proces przyswajania pojęcia nie musi zakończyć się w momencie sformułowania definicji. Realizacja postulatu spiralnego kształtowania pojęć wymaga, często już w nauczaniu początkowym, szerokiej bazy intuicyjnej umożliwiającej późniejszą systematyzację. Pełne rozumienie pojęcia następuje dzięki jasnemu uświadomieniu sobie kryterium wyróżniania obiektów podpadających i nie podpadających pod to pojęcie. Tego kryterium nie musi dopiero ustalić definicja. Niekiedy wystarczy zastąpić definicję opisem przekazującym znaczenie terminu w języku naturalnym ucznia. O rozumieniu zadecyduje już często początkowa faza porównywania dobrze dobranych przykładów i kontrprzykładów. Czasem wystarczy nawet analiza jednego paradygmatycznego przykładu, oddającego ogólną ideę i stanowiącego podstawę dla porównania z nim badanego obiektu. Sposób dochodzenia do kryterium rozróżniania zależy od rodzaju pojęć i od poziomu ucznia.*

W dalszych częściach tej pracy opiszemy proces kształtowania pojęcia miary na różnych szczeblach edukacji. Podamy również ważny, naszym zdaniem, przykład ilustrujący najważniejsze własności miary tworzonej przy pomocy twierdzenia Carathéodory'ego z miary zewnętrznej. Zaletą tego przykładu jest jego prostota, ale nie banalność. Student posługując się nim może zrozumieć wzajemne związki między pojęciami zachodzące w bardziej skomplikowanych abstrakcyjnych sytuacjach. To zapewne miała na myśli W. Nowak mówiąc o znaczeniu paradygmatycznego przykładu w powyższym cytacie.

Pracę zakończymy propozycją sformułowania warunku Carathéodory'ego dla pewnej rodziny funkcji rzeczywistych.

1. O kształtowaniu pojęcia miary Jordana na różnych poziomach edukacji

Z pojęciem miary uczeń spotyka się po raz pierwszy już w szkole podstawowej przy okazji wymierzania długości odcinków. Jest to miara jednowymiarowa, przyporządkowująca pewnym podzbiorom prostej nieujemne liczby rzeczywiste. W trakcie dalszej nauki pojawiają się miary określone na podzbiorach przestrzeni R^2, tzn. pole figury płaskiej i miara w przestrzeni R^3, tzn. objętość bryły.

Powoduje to dodatkowe komplikacje związane z pojawianiem się wielu różnych miar. Dla przykładu na płaszczyźnie mówimy o długości odcinka lub ogólnie krzywej oraz polu obszaru płaskiego, a w przestrzeni R^3 o długości, polu lub objętości.

Jak pokazują badania A. Wnęk, prowadzone pod kierunkiem H. Siwek (Siwek 2005, s. 66 – 72), potwierdzone przez badania studentki obecnego IV roku matematyki J. Blicharz pod kierunkiem J. Major, oraz badania L. Zaręby (Zaręba 2004), M. Legutko, E. Urbańskiej i J. Stańdo (Legutko, Urbańska, 2002; Legutko, Stańdo, 2006), niektórzy uczniowie gubią się w tym bogactwie różnych miar.

Wymienione tu pojęcia długości, pola i objętości są używane przez uczniów jako pojęcia potoczne. Tkwią one dla nich w samej rzeczywistości i wyłaniają się bez zorganizowanej ingerencji z zewnątrz. Na tej bazie mogą tworzyć się w umyśle tych uczniów idee głębokie pojęcia miary (Semadeni, 2002).

W ciągu dalszym proces edukacji może doprowadzić do ukształtowania się u niektórych uczących się osób poprawnej definicji miary Jordana lub jej uogólnienia – miary Lebesgue'a. Będą to już wtedy pojęcia naukowe. Z chwilą wkroczenia na drogę pojęć naukowych zjawia się konieczność przechodzenia od ogólnych sformułowań do konkretnych modeli i przykładów, akceptacji przypadków granicznych, potrzeba uświadomienia sobie pełnego zbioru desygnatów, umiejętność wyodrębnienia składowych części rozważanego pojęcia (Konior, 2002).

Proces kształtowania pojęcia miary na trzech pierwszych poziomach edukacji (szkoła podstawowa, gimnazjum, szkoła pogimnazjalna) można porównać do trzech poziomów kształtowania pojęć geometrycznych, które opisał M. Hejný (1997).

Na poziomie przedpojęciowym, który dla pojęcia miary przypada, naszym zdaniem, na okres nauki w szkole podstawowej, dziecko, poznając różne figury geometryczne, uczy się ich porównywania (dłuższy, krótszy, mniejszy, większy). Mając daną jednostkę miary potrafi wymierzać z pewną dokładnością długości, pola lub objętości. Bardzo pomocnym w tym procesie może być użycie tangramu (Major, Powązka, 2008).

Niektóre zamieszczone propozycje zadań w tym artykule można wykorzystać na poziomie pojęć uosobowionych. Uznajemy tu, że uczeń znajduje się na tym poziomie, jeżeli potrafi dostrzegać podstawowe figury geometryczne (prostokąt, kwadrat, równoległobok, prostopadłościan, ostrosłup, bryły obrotowe) i obliczać ich pola oraz objętości. W naszym systemie szkolnym powinno tak być podczas nauki w gimnazjum.

Osiągnięcie ostatniego poziomu pojęć społecznych jest równoznaczne z tym, że uczeń jest w stanie manipulować modelami brył, mierzyć odcinki i kąty, znajdować pola skomplikowanych figur narysowanych na papierze kratkowanym; potrafi rozpocząć tworzenie pojęć abstrakcyjnych, takich jak punkt, odcinek, figura płaska, kąt; potrafi wzbogacić swój geometryczny świat o nowe potrzebne pojęcia. Na tym poziomie można podjąć z uczniami próbę dowodu twierdzenia Bolyaja-Gerwiena (Czaplińska, 2004; Major, Powązka 2008). Odnośnie do pojęcia miary uczeń może znaleźć się na tym poziomie na przykład w szkole pogimnazjalnej lub w starszych klasach gimnazjum.

Uzupełnijmy te trzy poziomy jeszcze o poziom definicji formalnych. Osoba znajduje się na tym poziomie wtedy, gdy potrafi wypowiedzieć definicję danego pojęcia oraz posługuje się nią ze zrozumieniem. Odnośnie pojęć miary Jordana i Lebesgue'a na tym poziomie może znaleźć się np. student trzeciego roku matematyki naszego Uniwersytetu.

W wyniku doświadczeń wyniesionych z pierwszych trzech etapów edukacji w świadomości studentów I roku studiów matematycznych powinien ukształtować się obraz pojęcia miary Jordana zgodny z określeniem opisanym w pierwszej części tej pracy.

Niektórzy z nich potrafią zaakceptować przykłady figur na płaszczyźnie, które nie są mierzalne w sensie Jordana (np. kwadrat „sito" lub kwadrat z „brodą"), ale odnoszą się z rezerwą do zaakceptowania jako niemierzalnego, względem tej miary, na przykład zbiór liczb wymiernych dowolnego przedziału zawartego w zbiorze liczb rzeczywistych. Jest to, moim zdaniem, efekt wspomnianych już wcześniej trudności w posługiwaniu się różnymi miarami.

Wspomniane tu przykłady zbiorów niemierzalnych w sensie Jordana są bardzo ważne, gdyż ilustrują fakt, że miara Jordana nie jest przeliczalnie addytywna, z czego niestety nie zdawali sobie sprawy niektórzy badani studenci.

Jak pokazują prowadzone przeze mnie badania, pojęcie miary Jordana, w naturalny sposób związane z wymierzaniem, natrafiało na opór w percepcji studentów. Nie dziwi zatem fakt, że ci sami studenci mieli duże trudności w dostrzeżeniu analogii między definicją miary a procesem całkowym związanym z całką Riemanna, całkami krzywoliniowymi i powierzchniowymi (Powązka, Zaręba, 2007).

Odnotujmy na koniec tej części pracy, że w latach minionych pojęcie miary Jordana miało swe miejsce w programach i podręcznikach szkolnych (por. na przykład Krygowska 1966, s. 189 – 208; Krygowska, Treliński 1971, s. 274 – 301; Kąkol, Łomnicki, Powązka, Wołodźko, 1982, s. 147 – 149).

2. O kształtowaniu pojęcia miary podczas zajęć z analizy matematycznej

W czasie wykładu analizy matematycznej na jednym ze starszych roczników studiów (według nowych standardów będzie to na pierwszym roku studiów drugiego stopnia) studenci zapoznają się z ogólną teorią miary. Dowiadują się wtedy, że miara jest nieujemną, rzeczywistą funkcją określoną niekoniecznie na rodzinie wszystkich podzbiorów przestrzeni, ale na pewnym σ – ciele podzbiorów tej przestrzeni, przy czym jest ona przeliczalnie addytywna na zbiorach parami rozłącznych. Poznają również konstrukcję takiej miary z miary zewnętrznej za pomocą warunku Carathéodory'ego. Warunek ten pozwala na wybieranie z rodziny wszystkich podzbiorów przestrzeni pewnego σ – ciała zbiorów. Wtedy miara zewnętrzna zawężona do tego σ – ciała jest miarą i to miarą zupełną. Właśnie w ten sposób tworzy się w R^n, $n \in N$, miarę Lebesgue'a.

Opisana wyżej konstrukcja nie jest zbyt trudna, ale dowód twierdzenia Carathéodory'ego jest żmudny i opiera się na dość zaawansowanym rachunku zbiorów. Również nie jest łatwa dla studentów charakteryzacja w $R^n, n \in N$, zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Ze względów dydaktycznych potrzebny jest dobry przykład ilustrujący działanie omawianego warunku, własności zbiorów mierzalnych oraz własności funkcji mierzalnych względem tej miary. Poniżej podajemy taki przykład.

Przykład

W niepustym zbiorze X, zawierającym co najmniej dwa różne punkty, wybieramy dwa różne punkty x_0 i x_1. Określamy w rodzinie wszystkich podzbiorów tego zbioru funkcję $\mu^* : 2^X \to R$ wzorem:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & x_0 \notin A \text{ i } x_1 \notin A \\ 2, & x_0 \in A \text{ i } x_1 \notin A \\ 4, & x_0 \notin A \text{ i } x_1 \in A \\ 5, & x_0 \in A \text{ i } x_1 \in A \end{cases} .$$

Nietrudno sprawdzić, że funkcja ta jest miarą zewnętrzną. Rodzina S zbiorów przestrzeni X spełniająca warunek

$$\{S = Z \subset X : \mu(A) = \mu(A \cap Z) + \mu(A \setminus Z)\},$$

gdzie A jest dowolnym zbiorem z X, jest σ – ciałem zbiorów przestrzeni X złożonym ze zbiorów zawierających oba punkty lub niezawierających żadnego z nich. Wtedy miara $\mu : S \to R$ ma postać

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & x_0 \notin A \text{ i } x_1 \notin A \\ 5, & x_0 \in A \text{ i } x_1 \in A \end{cases} .$$

Kładąc w miejsce X zbiory $R^n, n \in N$ i dobierając odpowiednio punkty x_0 i x_1 otrzymujemy różne przykłady miar.

Przyjmijmy teraz w określeniu funkcji $\mu^* : 2^R \to R$, $x_0 = 3$ i $x_0 = 5$. Wtedy miara zewnętrzna $\mu^* : 2^R \to R$ jest, podobnie jak miara zewnętrzna Lebesgue'a, określona w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. Nie jest to jednak miara zewnętrzna metryczna, gdyż istnieją zbiory rozłączne i takie, że miara zewnętrzna sumy tych zbiorów nie jest równa sumie ich miar zewnętrznych. Takimi zbiorami są np. przedziały [0, 3,5] i [4, 6] zawierające po jednym z wybranych punktów.

Odnotujmy również i to, że z określenia otrzymanej miary wynika, iż nie wszystkie zbiory borelowskie prostej są mierzalne. Takimi zbiorami są na przykład przedziały zawierające tylko jeden z wybranych punktów.

Utworzona miara $\mu : S \to R$ nie jest też niezmiennicza względem przesunięcia. Zauważmy bowiem, że przedział [–4, 0] ma, według tej miary, miarę 0. Po przesunięciu o 4 jednostki w prawo dostajemy przedział [0, 4], który jest zbiorem niemierzalnym, a przesuwając przedział [–4, 0] o 7 jednostek w prawo dostajemy przedział [3, 7], który ma miarę 5, gdyż zawiera oba wybrane punkty.

Omawiany przykład miary nadaje się znakomicie do ilustracji ważnych twierdzeń związanych z funkcjami mierzalnymi. Przypominamy, że przez funkcję mierzalną rozumiemy taką rzeczywistą funkcję określoną na mierzalnym podzbiorze A przestrzeni X, dla której przeciwobraz przedziału $(-\infty, a)$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, jest zbiorem mierzalnym. Zauważmy, że w omawianym tu przykładzie funkcja $f(x) = 1, x \in R$, jest funkcją mierzalną względem skonstruowanej miary μ, bowiem

$$f^{-1}((-\infty, a)) = \begin{cases} R, & \text{gdy } a \geqslant 1 \\ \emptyset, & \text{gdy } a < 1 \end{cases}.$$

Natomiast funkcje:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \leqslant 4 \\ -1, & \text{dla } x > 4 \end{cases}$$

lub

$$h(x) = x$$

nie są funkcjami mierzalnymi względem tej miary, bowiem

$$g^{-1}((-\infty, 0)) = (4, +\infty) \notin S$$

oraz

$$h^{-1}((-\infty, 4)) = (-\infty, 4) \notin S.$$

Ponieważ $f(x) = g(x)$, więc funkcje f i g pokazują, że z mierzalności wartości bezwzględnej pewnej funkcji nie wynika mierzalność tej funkcji.

Funkcja h ma uświadamiać studentom, że twierdzenie o mierzalności funkcji ciągłej jest prawdziwe tylko dla mierzalności względem miary Lebesgue'a.

Od wielu lat przykład ten jest stale używany na moich wykładach i ćwiczeniach. Trzeba jednak z przykrością powiedzieć, że w wielu przypadkach badani studenci niechętnie uczą się przykładów, ograniczając swą wiedzę do przyswojenia wypowiedzi samych twierdzeń, często bez znajomości ich dowodów. Jest to przejaw formalizmu, o którym wspominał M. Hejný (1997).

Uwagi końcowe

W poprzednim paragrafie pokazano, jak z miary zewnętrznej, będącej funkcją nieujemną i przeliczalnie podaddytywną, a zatem również podaddytywną, buduje się przez zawężenie dziedziny miarę, tzn. nieujemną i przeliczalnie addytywną, a więc również addytywną funkcję na zbiorach parami rozłącznych.

Zachodzi naturalne pytanie, czy dla dowolnej podaddytywnej funkcji $\psi : R \to R$, tzn. spełniającej nierówność

$$\psi(x+y) \leqslant \psi(x) + \psi(y), \quad x, y \in R$$

istnieje niepusty zbiór $S \subset R$, taki że funkcja $\varphi = \psi|_S$ jest addytywna, tzn.

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y), \quad x, y \in S.$$

Zauważmy najpierw, że zbiór S powinien być zamknięty na dodawanie liczb. Dyskutując ze studentami na temat rozwiązania tego zadania możemy sformułować następujące stwierdzenie.

> Jeżeli funkcja $\psi : R \to R^+$ jest podaddytywna i zbiór S jest niepustym zbiorem miejsc zerowych tej funkcji, to funkcja $\varphi = \psi|_S$ jest addytywna.

Istotnie. Niech $x, y \in S$. Wtedy $\psi(x) = \psi(y) = 0$. Stąd i z nieujemności funkcji ψ dostajemy

$$0 \leqslant \psi(x+y) \leqslant \psi(x) + \psi(y) = 0,$$

a zatem $\psi(x+y) = 0$.

Ważną dydaktycznie aktywnością jest konstruowanie stosownych przykładów. Dla funkcji podaddytywnej $\psi(x) = |\sin x|$ zbiorem miejsc zerowych jest $S = k\pi : x \in Z$ i $\varphi(x) = 0$ dla $x \in S$.

Zauważmy również, że założenie o niepustosci zbioru S jest istotne, gdyż istnieją funkcje podaddytywne, które nie posiadają miejsc zerowych, na przykład $\psi(x) = |x| + 1, x \in R$.

Opisany powyżej sposób tworzenia funkcji addytywnej przez zawężenie dziedziny funkcji podaddytywnej do zbioru jej miejsc zerowych nie jest jedynym. Wynika to z następującego stwierdzenia.

> Jeżeli funkcja $\psi : R \to R^+$ jest podaddytywna i istnieje niepusty zbiór S, taki że
>
> $$\psi(x + y) \geqslant \psi(x) + \psi(y), \;\; x, y \in S,$$
>
> to funkcja $\varphi = \psi|_S$ jest addytywna.

Zbiór S, o którym mowa w powyższym stwierdzeniu, nie musi być jedyny dla danej funkcji podaddytywnej. Na przykład dla funkcji $\psi(x) = |x|$ przyjmując $S = [0, +\infty)$ otrzymujemy $\varphi(x) = x$, natomiast gdy $S = (-\infty, 0]$, to $\varphi(x) = -x$

Rozważanie ze studentami tego typu problemów wydaje się być bardzo kształcące. Pozwala ono dostrzec pewne analogie i różnice między różnymi pojęciami matematycznymi, a w szczególności głębiej zrozumieć konstrukcję miary z miary zewnętrznej.

Literatura

[1] Czaplińska, J.: 2004, *Od tangramu do twierdzenia Bolyaja-Gerwiena*, NiM 49, s. 9 – 10.

[2] Hejný, M.: 1997, *Rozwój wiedzy matematycznej*, Dydaktyka Matematyki nr 19, Roczniki PTM, s. 15 – 28.

[3] Kąkol, H., Łomnicki, A., Powązka, Z., Wołodźko, S.: 1982, *Matematyka* 8, WSiP, Warszawa.

[4] Kołodziej, W.: 1978, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa.

[5] Konior, J.: 2002, *Pojęcia matematyczne i ich kształtowanie w nauczaniu szkolnym*. Materiały do studiowania dydaktyki matematyki pod redakcją Jerzego Żabowskiego, t. IV, Prace prof. dr hab. Jana Koniora, Wydawnictwo Naukowe Novum, Płock, s. 11 – 121.

[6] Krygowska, Z.: 1967, *Geometria. Podstawowe własności płaszczyzny* cz. II, PZWS, Warszawa.

[7] Krygowska, Z., Treliński, G.: 1971, *Geometria dla klasy* IV *liceum ogólnokształcącego i technikum*, PZWS, Warszawa.

[8] Legutko, M., Stańdo, J.: 2006, *Odróżnić pole figury od obwodu, problem czy brak wiedzy*? Materiały z XX SDM, Bielsko-Biała, (dokumemt elektroniczny). http://fdm.e-dlaszkoly.pl/fple.pkp/6/CD/XXSDM html, Bielsko-Biała.

[9] Legutko, M., Urbańska, E.: 2002, *Forming estimation skills*, w: Bazzini L.1e Digital Era (Proceedings Actes CIEAEM 53), s. 224 – 230.

[10] Łojasiewicz, S.: 1973, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa.

[11] Major, J., Powązka, Z.: 2008, *Utváranie pojmu obsah rovinného útvaru na rôznych stupňoch vzdelávania*, Acta Mathematica nr 11. FPV Univerzita Konštantina Filozofa, Nitra, s. 135 – 140.

[12] Moszner, Z.: 1961, *O mierzeniu w matematyce*, PZWS, Warszawa.

[13] Nowak, W.: 1989; *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

[14] Powązka, Z., Zaręba, L.: 2007, *Teachers studies students difficulties concerning the generalization of the concept of the Riemann intergral*, Matematyka XIII, Prace naukowe, Akademia im Jana Długosza w Częstochowie, Częstochowa, s. 347 – 354.

[15] Semademi, Z. 2002; *Trojaka natura matematyki; idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne*, Dydaktyka Matematyki nr 24. Roczniki PTM, s. 41 – 92.

[16] Sikorski, R.: 1969, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa.

[17] Siwek, H.: 2005; *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

[18] Zaręba, L.: 2004; *Proces uogólniania w matematyce i stosowania symbolu literowego u uczniów* 10 – 14 *lat*, (niepublikowana praca doktorska), Akademia Pedagogiczma, Kraków.

Autor pracuje w Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie