Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Stanisław Machowski (Poznań)

Z badań nad rozpoznawaniem umiejętności formułowania problemów przez studentów matematyki

Wprowadzenie

Kształcenie matematycznej aktywności jest jednym z najważniejszych celów nauczania matematyki i to na każdym poziomie edukacji. W realizacji tego celu szczególnie ważną rolę odgrywa rozwiązywanie różnorodnych zadań. Nauczyciel matematyki powinien wiedzieć i jasno zdawać sobie sprawę z tego, jakie funkcje spełnia dane zadanie i co przez jego rozwiązanie osiągamy w nauczaniu. W literaturze z dydaktyki matematyki poświęconej problematyce zadaniowej można znaleźć różne typologie zadań. Podstawą jednej z nich, wypracowanej przez Z. Krygowską (1977 b), jest wnikliwa analiza rozwiązania zadania. Autorka wyróżniła trzy rodzaje zadań – zadania ćwiczenia, zadania zwykłe zastosowania teorii i zadania problemy. Granica między różnymi typami zadań jest nieostra i dla każdego ucznia może przebiegać nieco inaczej w zależności na przykład od zasobu jego wiedzy. Dlatego też różnice pomiędzy zadaniami poszczególnych typów ukazuje się poprzez analizę różnych przykładów i kontrprzykładów.

W wymienionej typologii zadania problemy to zadania, dla rozwiązania których uczeń nie ma gotowych algorytmów, których rozwiązania nie uzyska się na danym poziomie bez pewnej pomysłowości, matematycznej wyobraźni itp. Zadania – problemy należą do tzw. zadań otwartych[1] i ta ich otwartość stanowi temat rozważań teoretycznych i badań empirycznych.

Operacje i zadania odwrotne

Termin „zadania odwrotne” nie jest pojęciem nowym w literaturze poświęconej problematyce zadaniowej. Jest on najczęściej wyjaśniany poprzez różne przykłady.

[1]Termin „zadania otwarte i zamknięte” został wprowadzony w czasie obrad Międzynarodowej Komisji Studiowania i Ulepszania Nauczania Matematyki w 1958 r.

Już M. P. Erdniew (1972) w swej metodyce ćwiczeń z matematyki do różnych zadań grupowanych wokół rozwiązanego problemu głównego włącza m.in. tzw. zadania odwrotne. W innej pracy (Erdniew, 1978) roli operacji odwrotnych i zadań odwrotnych w nauczaniu i uczeniu się matematyki poświęcone zostały całe dwa rozdziały.

Również Z. Krygowska (1977a, s. 127; 1977b, s. 105) podkreśla znaczenie operacji odwrotnych i zadań odwrotnych w nauczaniu matematyki. W opracowanej przez nią koncepcji nauczania czynnościowego, wiązanie danych operacji z operacjami do nich odwrotnymi jest jednym z podstawowych zabiegów dydaktycznych, mających na celu zapewnienie prawidłowego i efektywnego procesu kształtowania myślenia matematycznego. Natomiast „przedłużanie" rozwiązanego zadania przez wiązanie go m.in. z zadaniami do niego „odwrotnymi" nazywa praktyczną metodą rozszerzania „matematycznego horyzontu uczniów", której celem jest „puszczenie w ruch" myśli ucznia i rozbudzanie chęci eksploracji.

Także A. Dobrzycki (1986, s. 277–282) nawiązuje do zagadnienia formułowania problemów odwrotnych. Spośród analizowanych tam zadań do interesującej nas grupy można zaliczyć następujące:

- Zbiorem rozwiązań nierówności $W_n(x) \leqslant 0$ jest zbiór $< 0, 4 >$.
  Co można powiedzieć o wielomianie $W_n(x)$?
- Zbiorem rozwiązań nierówności $Wn(x) > 0$ jest zbiór:
  a) $(-5, \infty)$,
  b) $(0, \infty)$,
  c) $(-1, 3) \cup (6, 8)$.
  Jaki jest znak współczynnika przy najwyższej potędze?

Wspomniany Autor uważa, że takie zadania stanowią oryginalne problemy dla ucznia, a ich rozwiązywanie może być początkiem twórczej aktywności ucznia.

W dalszej części dla potrzeb tej pracy przyjmujemy następujące znaczenie terminu „formułowanie problemów odwrotnych": *formułowanie problemów – zadań odwrotnych to konstruowanie zadania bądź zadań, gdy znane jest jego* (*ich*) *rozwiązanie*. Praktyczne „dookreślenie" powyższej definicji stanowić będą zadania zamieszczone w części poświęconej opisowi badań.

W podręcznikach i popularnych zbiorach zadań nie spotyka się na ogół tego typu zadań. W tej sytuacji redagowanie ich staje się zadaniem nauczyciela, jeśli chce on wdrażać stopniowo swoich uczniów w arkana twórczości. Wydaje się więc uzasadnionym stawianie przed takimi zadaniami kandydatów do zawodu nauczyciela matematyki.

W dalszej części artykułu przedstawione są badania umiejętności „formułowania problemów – zadań odwrotnych" przez studentów III i IV roku matematyki przygotowujących się do zawodu nauczyciela matematyki.

Opis badań

Każda twórczość, nawet ta w ograniczonym zakresie, wymaga posiadania pewnego zasobu wiedzy. Dla przeprowadzonych badań przyjęto, że badani studenci posiadają podstawowe wiadomości o: funkcji liniowej, kwadratowej, wymiernej, wartości bezwzględnej i wielomianach oraz potrafią rozwiązywać odpowiednie równania i nierówności. W szczególności przyjęto, że potrafią rozwiązywać równania typu:

$$|x-4|+|x-5|=1,$$
$$|x^2-4|+|x^2-16|=12$$

oraz nierówności typu:

$$|x-4|<3,$$
$$|x+3|\geqslant 2,$$
$$\tfrac{x-5}{x-1}\leqslant 0.$$

Z dużym prawdopodobieństwem można przyjąć również, że każdy ze wspomnianych studentów już w szkole średniej tego typu zadania rozwiązywał, skoro jako kierunek studiów wybrał matematykę.

Badania były anonimowe, przeprowadzono je w dwóch grupach, obejmowały łącznie 33 osoby. Wcześniej studenci nie byli poinformowani, że będą przeprowadzone badania.

Celem badań było:

1. Poznanie dróg – sposobów wykorzystywanych przez studentów w poszukiwaniu rozwiązania.
2. Określenie, czy formułowanie zadań tzw. odwrotnych (tu w zakresie ograniczonym do wybranego działu matematyki) stanowi problem wart dalszych badań (i ewentualnie jakich) oraz czy jest to zagadnienie wymagające uwzględnienia w kształceniu nauczycieli matematyki.

W badaniach zastosowano metodę analizy dokumentów. Każdy student otrzymał zestaw czterech zadań z poleceniami. Czasu nie limitowano.

Zadanie 1

Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest każda liczba zbioru $<3,4>$.

Zadanie 2

Ułóż nierówność stopnia pierwszego, której rozwiązaniem jest każda liczba zbioru $(-\infty, 2 > \cup < 3, +\infty)$.

Zadanie 3

Ułóż nierówność, której rozwiązaniem jest każda liczba zbioru $< 2, 3)$.

Zadanie 4

Ułóż równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę zbioru $< -4, -2 > \cup < 2, 4 >$.

Zadaniem studentów było pisemne przedstawienie swoich rozwiązań. Badani zostali też poinformowani, że głównym celem badań jest określenie dróg prowadzących do rozwiązania zadań oraz o tym, że ich prace będą analizowane pod tym kątem. Stąd też dodatkowa prośba, by wszystkie podejmowane próby rozwiązywania znalazły odzwierciedlenie w pracy.

Uwaga 1. Zadania wykorzystane w badaniach są przykładami zadań odwrotnych w sensie przyjętej wcześniej definicji.

Uwaga 2. Dla ułożenia równań i nierówności wystarcza w zupełności wiedza z matematyki ze szkoły średniej. Na podkreślenie zasługuje brak algorytmów do konstruowania takich zadań. To była zasadniczo jedyna nowość i trudność do pokonania przez badanych.

Zestawienie ilościowe uzyskanych wyników

	Liczba odpowiedzi		
	z rozwiązaniami		bez rozwiązania
	poprawnymi	błędnymi	
Zadanie 1	13	15	5
Zadanie 2	6	23	4
Zadanie 3	12	18	3
Zadanie 4	2	22	9

Tabela 1. Zestawienie zbiorcze odpowiedzi

Liczba zadań			Liczba osób
rozwiązanych		nie rozwiązanych	
poprawnie	błędnie		
4	0	0	1
3	1	0	2
2	2	0	2
2	1	1	1
1	3	0	13
1	2	1	2
1	1	2	1
1	0	3	1
0	4	0	3
0	3	1	2
0	2	2	4
0	1	3	1

Tabela 2. Zestawienie różnych wariantów odpowiedzi

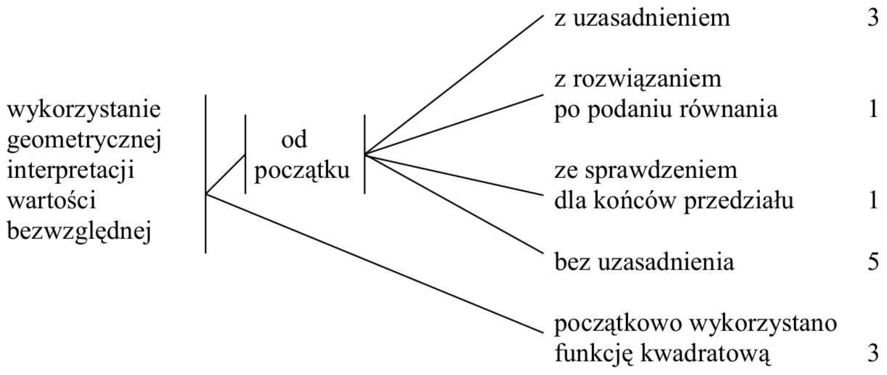
Prezentacja dróg poszukiwania rozwiązań ujawnionych w przeprowadzonych badaniach

Zadanie 1

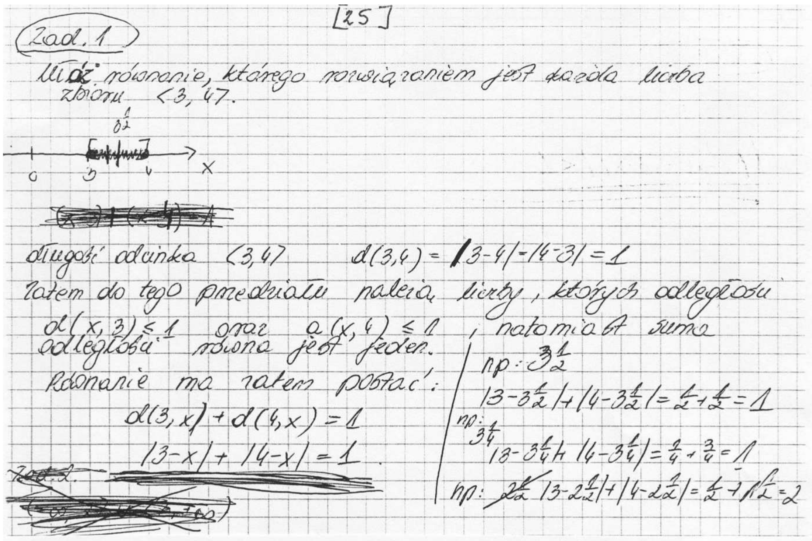
Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest każda liczba zbioru $< 3, 4 >$.

Odpowiedzi poprawnych: 13.

Opis dróg poszukiwania rozwiązania



Przykład rozwiązania poprawnego z uzasadnieniem (praca [25])


[25]

Zad. 1

Ułóż równanie, którego rozwiązaniem jest każda liczba zbioru $<3, 4>$.

długość odcinka $<3,4>$ $d(3,4) = |3-4| = |4-3| = 1$

Zatem do tego przedziału należą liczby, których odległości $d(x,3) \le 1$ oraz $d(x,4) \le 1$, natomiast suma odległości równa jest jeden.

Równanie ma zatem postać:

$d(3,x) + d(4,x) = 1$

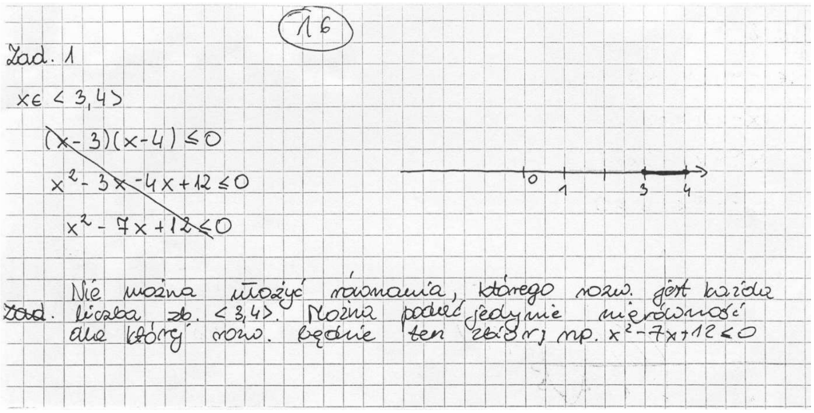
$|3-x| + |4-x| = 1$.

np.: $3\frac{1}{2}$ $|3-3\frac{1}{2}| + |4-3\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

np.: $3\frac{1}{4}$ $|3-3\frac{1}{4}| + |4-3\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

np.: $2\frac{1}{2}$ $|3-2\frac{1}{2}| + |4-2\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 2$

Przykład rozwiązania z odpowiedzią błędną (praca [16])


16

Zad. 1

$x \in <3,4>$

$(x-3)(x-4) \le 0$

$x^2 - 3x - 4x + 12 \le 0$

$x^2 - 7x + 12 \le 0$

Nie można ułożyć równania, którego rozw. jest każda liczba zb. $<3,4>$. Można podać jedynie nierówność, której rozw. będzie ten zbiór, np. $x^2-7x+12 \le 0$

Zadanie 2

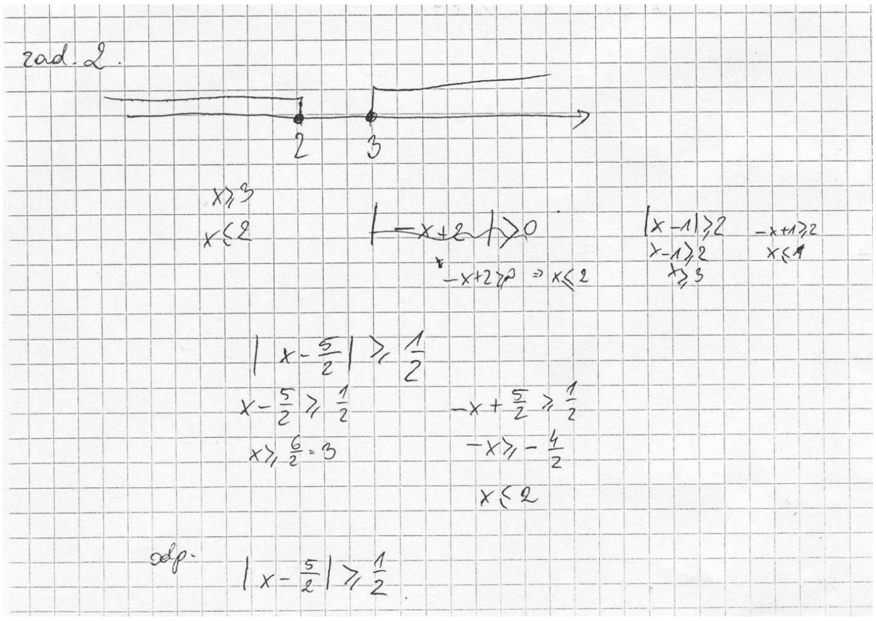
Ułóż nierówność stopnia pierwszego, której rozwiązaniem jest każda liczba zbioru $(-\infty, 2> \cup <3, +\infty)$.

Rozwiązań poprawnych: 6.

Opis dróg poszukiwania rozwiązania

1. Metoda prób, błędów, zgadywanie	4
2. Poprzez dopasowywanie znanego warunku	1
3. Z wykorzystaniem funkcji wartość bezwzględna	1

Przykład rozwiązania poprawnego – metoda prób, błędów, zgadywania (praca [20])


zad. 2.

2 3

$x \geq 3$

$x \leq 2$

$|-x+2-1| \geq 0$

$-x+2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$

$|x-1| \geq 2$

$x-1 \geq 2$

$x \geq 3$

$-x+1 \geq 2$

$x \leq 1$

$|x-\frac{5}{2}| \geq \frac{1}{2}$

$x-\frac{5}{2} \geq \frac{1}{2}$

$x \geq \frac{6}{2} = 3$

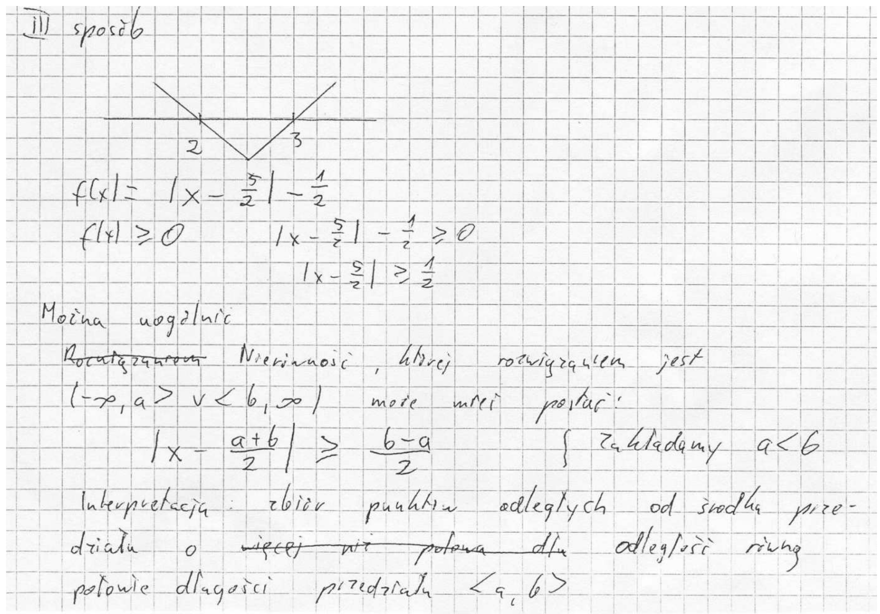
$-x+\frac{5}{2} \geq \frac{1}{2}$

$-x \geq -\frac{4}{2}$

$x \leq 2$

odp. $|x-\frac{5}{2}| \geq \frac{1}{2}$.

Przykład rozwiązania poprawnego – z wykorzystaniem funkcji wartość bezwzględna (praca [5])


ii) sposób

2 3

$f(x) = |x-\frac{5}{2}| - \frac{1}{2}$

$f(x) \geq 0 \quad |x-\frac{5}{2}| - \frac{1}{2} \geq 0$

$|x-\frac{5}{2}| \geq \frac{1}{2}$

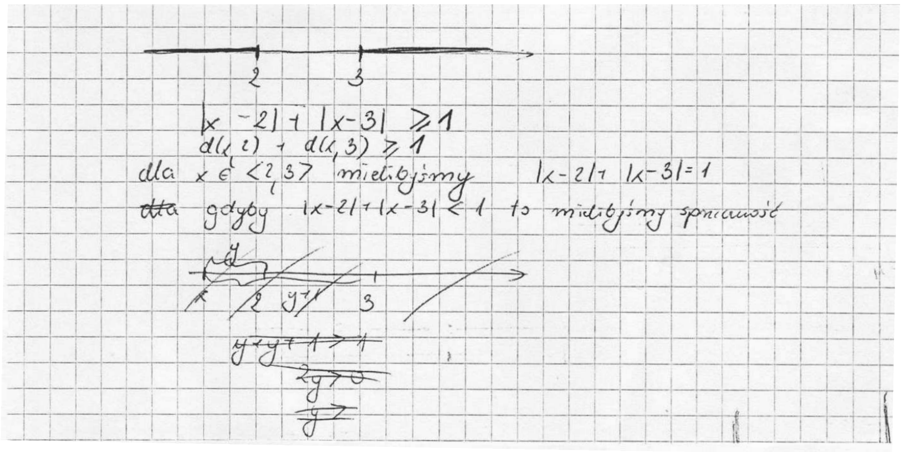
Można uogólnić

~~Rozwiązaniem~~ Nierówność, której rozwiązaniem jest $(-\infty, a\rangle \cup \langle b, \infty)$ może mieć postać:

$|x - \frac{a+b}{2}| \geq \frac{b-a}{2}$ { zakładamy $a<b$

Interpretacja: zbiór punktów odległych od środka przedziału o ~~więcej niż połowa dla~~ odległość równą połowie długości przedziału $\langle a, b\rangle$

Przykład rozwiązania błędnego (praca [2])



Zadanie 3

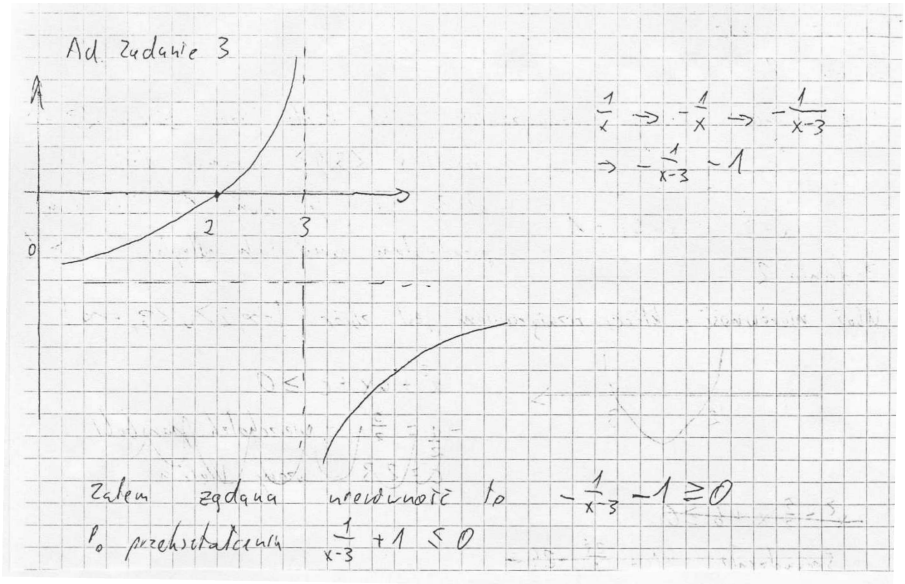
Ułóż nierówność, której rozwiązaniem jest każda liczba zbioru $< 2, 3)$.

Rozwiązań poprawnych: 12.

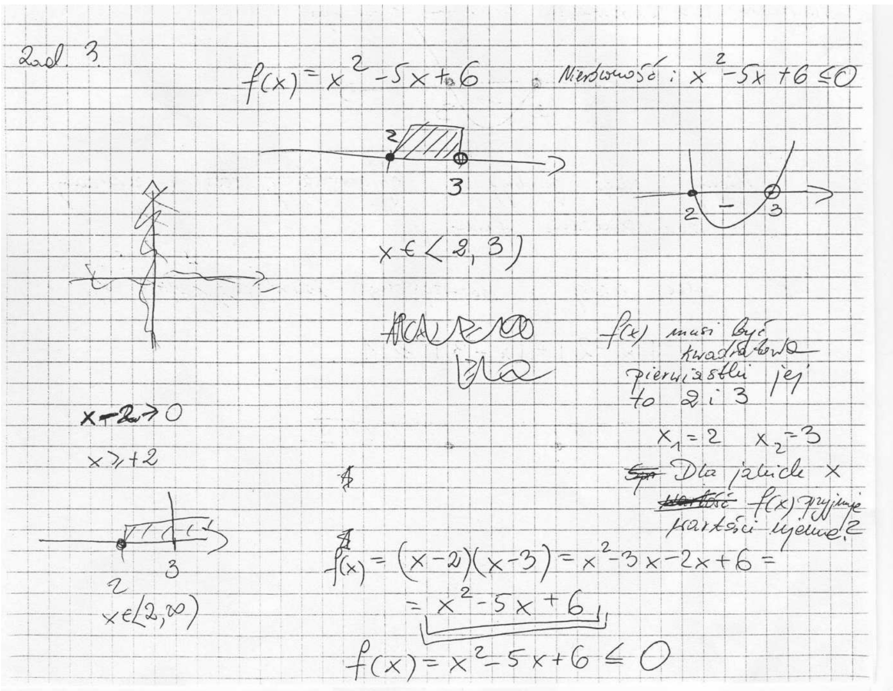
Opis dróg poszukiwania rozwiązania

wykorzystanie funkcji wymiernej (nie homograficznej)	bez sprawdzenia	8
	ze sprawdzeniem	2
wykorzystanie funkcji homograficznej		1
utworzenie ilorazu funkcji z pierwiastkiem w mianowniku		1

Przykład rozwiązania poprawnego z wykorzystaniem funkcji homograficznej (praca [5])



Przykład rozwiązania błędnego (praca [21])



Inne przykłady odpowiedzi błędnych:

$(x-2)(x-3) > 0$	3
$\lvert x-2\rvert + \lvert x-3\rvert \leqslant 1$	2
$(x-2)(x-3) \leqslant 0$	8
$\lvert \sin x\rvert + 2 < 3$	1
$\lvert x-2,5\rvert \leqslant 0,5\rvert$	1
$\lvert\lvert 2-x\rvert - \lvert 3-x\rvert\rvert < 1$	1
$\frac{x-2}{x-3} < 0$	1

Zadanie 4

Ułóż równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę zbioru $< -4, -2 > \cup < 2, 4 >$.

Rozwiązań poprawnych: 2.

Opis dróg poszukiwania rozwiązania

suma modułów i parzystość (ze sprawdzeniem)	1
suma modułów z kwadratem niewiadomej	1

Przykłady odpowiedzi błędnych:

1. Układ równań $\begin{cases} \lvert x+4\rvert + \lvert x+2\rvert = 2 \\ \lvert x-4\rvert + \lvert x-2\rvert = 2 \end{cases}$	6
2. Układ nierówności $2 \leqslant \lvert x\rvert \leqslant 4$	2
3. $\lvert x\rvert \in < 2, 4 >$	1
4. Tożsamości: $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$	2
$x^2 + 5 = x^2 + 5$	1
5. $y = x$ dla $y \in < -4, -2 > \cup < 2, 4 >$	1
6. Nie można napisać równania, które jest spełnione przez każdą liczbę podanego zbioru. Można podać jedynie nierówność, dla której rozwiązaniem będzie ten zbiór	2

Podsumowanie

Przeprowadzone badania ukierunkowane były na wstępne rozpoznanie umiejętności formułowania zadań–problemów odwrotnych do ściśle określonej grupy zadań. Analiza rozwiązań wykonanych przez badanych studentów pozwoliła skonstruować drogi – sposoby prowadzące do poprawnych odpowiedzi. Ich poznanie stanowiło pierwszy cel badań. Okazało się, że wielu badanych, którzy rozwiązali dane zadanie poprawnie, korzystało ze znanego schematu rozwiązywania równań i nierówności odpowiednich typów. Wśród odpowiedzi poprawnych znajdują się i takie, do których uzasadnienia nie przedstawiono lub nie można go w oparciu o zamieszczone notatki ustalić.

Trudno jest też w oparciu o zastosowaną metodę analizy wytworów pisemnych ustalić przyczyny braku lub błędnych rozwiązań. Głównym powodem w scharakteryzowaniu przyczyn błędnych odpowiedzi jest brak komentarzy, brak kolejnych kroków rozumowań, zamieszczanie „urwanych” zapisów rozwiązań itp. Formułowanie wniosków w oparciu o takie niepełne informacje stanowiłoby nadużycie rzetelności badań naukowych. Nie stanowi to jednak powodu do zaprzestania badań tego typu. Świadczy to tylko o ograniczonym zasięgu zastosowanej metody analizy dokumentów i uzasadnia potrzebę włączenia metody badań klinicznych. Zestawienie uzyskanych wyników ujawnia, jak wielu badanych nie radzi sobie z postawionym problemem.

Tylko 6 osób z 33 badanych rozwiązało co najmniej dwa zadania poprawnie i aż 10 osób żadnego poprawnie – jest to sytuacja wysoce niezadowalająca. Wyniki te można uznać za wystarczająco mocne uzasadnienie do dalszych zmodyfikowanych i bardziej wnikliwych badań. Jest to też przekonujący argument do włączenia zagadnienia formułowania problemów–zadań odwrotnych do kursu dydaktyki matematyki oraz ćwiczeń z przedmiotów czysto matematycznych.

Literatura

[1] Dobrzycki, A.: 1986, *Przykłady rozwiązywania zadań w procesie nauczania matematyki*, w: Wprowadzenie do wybranych zagadnień dydaktyki matematyki, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego.

[2] Erdniew, P. M.: 1972, *Mietodika uprażnienij po matiematikie*, Prosieszczenije, Moskwa.

[3] Erdniew, P. M.: 1978, *Priepodawanie matiematiki w szkole*, Prosieszczenije, Moskwa.

[4] Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys Dydaktyki Matematyki* cz.1, WSiP, Warszawa.

[5] Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys Dydaktyki Matematyki* cz.3, WSiP, Warszawa.

Autor pracuje w Uniwersytecie Adama Mickiewicza w Poznaniu