Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Joanna Major, Maciej Major (Kraków)

Uwagi o rozumieniu twierdzeń i definicji przez studentów kończących pierwszy rok studiów matematycznych

Wstęp

Jednym z podstawowych celów kształcenia matematycznego jest rozwijanie logicznego myślenia uczących się. T. Kotarbiński (1970) do kultury logiczno-filozoficznej zalicza m.in.: umiejętność definiowania i znajomość różnych rodzajów i form definicji oraz umiejętność poprawnego uzasadniania wniosków, krytycyzm wobec własnych twierdzeń i twierdzeń innych osób.

S. Turnau (1990) wśród celów poznawczych, ogólnych (tj. umiejętności i postaw potrzebnych współczesnemu człowiekowi niezależnie od dziedziny jego działalności) wymienia *umiejętność logicznego argumentowania*. Wśród celów specyficznych tj. umiejętności i postaw specyficznych dla działalności matematycznej, znalazła się m.in.: *umiejętność znajdowania i formułowania prostych dowodów*.

Zagadnienia dotyczące wprowadzania oraz opracowywania definicji pojęć matematycznych (a w tym ich odkrywania przez uczących się oraz prezentowania ich uczącym się), podobnie jak tematy związane z wprowadzaniem i posługiwaniem się przez uczących się twierdzeniami matematycznymi, są szeroko dyskutowane w literaturze dydaktycznej (Kąkol, 1984, 1985; Konior, 1998, Krygowska, 1977; Nowecki, 1975, 1977, Pieprzyk, 1985; Pieprzyk, Żeromska, 2009). Zagadnienia te są ważne na każdym etapie edukacji matematycznej. Należy na nie zwrócić szczególną uwagę podczas kształcenia studentów, zwłaszcza przyszłych nauczycieli matematyki, gdyż powinni oni posiadać wiadomości i umiejętności „teoretyczne” i „praktyczne” dotyczące podstaw matematyki.

Z prowadzonych i opisanych przez nas badań wynika, że część studentów kierunku nauczycielskiego matematyka posiada duże braki w zakresie szkolnej wiedzy matematycznej dotyczącej m.in. umiejętności formułowania definicji, odtworzenia znanej definicji, jak i braki w umiejętnościach zapisania definicji znanego badanym pojęcia matematycznego w inny sposób, tj. na przykład podania definicji równoważnej wyjściowej bazującej na innym pojęciu, czy zbudowania definicji w zadanej postaci np. definicji wielonormowej, czy definicji w postaci normalnej. Badani mają też duże trudności z posługiwaniem się twierdzeniami matematycznymi (Major, 2006; Major, Major, 2009).

Cele badań

W prowadzonych, opisanych w niniejszej pracy, badaniach podjęliśmy próbę zdiagnozowania wiedzy proceduralnej i deklaratywnej studentów dotyczącej twierdzeń i definicji matematycznych.

W niniejszej pracy zaprezentujemy w jaki sposób studenci rozumieją wybrane pojęcia metodologiczne. W szczególności omówimy:

– w jaki sposób badani studenci rozumieją pojęcie definicji oraz jej miejsce w teoriach matematycznych;

– jak studenci oceniają poprawność różnych definicji tego samego pojęcia matematyki szkolnej (wartość bezwzględna liczby rzeczywistej);

– jak studenci oceniają prawdziwość stwierdzeń matematycznych i jak weryfikują swoje przypuszczenia.

Przedstawimy też poglądy studentów na to, czym są twierdzenia matematyczne i jaką rolę odgrywają one w matematyce. Zaprezentujemy także fragment wyników badań dotyczących oceny prawdziwości stwierdzeń matematycznych. Jest to ważne zagadnienie, na które zwraca uwagę wielu dydaktyków, m. in. H. Kąkol (1985) stwierdza, że: *Jednym z podstawowych celów nauczania matematyki jest wyrabianie u uczniów umiejętności prowadzenia rozumowań matematycznych tj. umiejętność formułowania twierdzeń, odróżnianie w twierdzeniach założeń i tezy oraz prowadzenia prostych rozumowań matematycznych.*

W swoich badaniach chcieliśmy uzyskać choćby częściowe odpowiedzi na sformułowane powyżej pytania.

Badana grupa osób

Prezentowane tu wyniki stanowią fragment szerszych badań prowadzonych w populacji studentów różnych roczników kierunku matematyka Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie oraz uczniów krakowskich liceów ogólnokształcących w latach 2001 – 2009.

W niniejszej pracy przedstawimy wyniki badań 43 osobowej grupy studentów I roku kierunku matematyka (specjalność nauczycielska oraz matematyka stosowana). Badania przeprowadzone były w maju, a więc w ostatnim tygodniu zajęć dydaktycznych roku akademickiego.

Studenci w chwili prowadzenia badań mieli za sobą co najmniej rok studiów, w czasie którego konieczna była dość duża samodzielność w prowadzeniu prostych rozumowań matematycznych. Badani studenci zdali już egzaminy z analizy matematycznej oraz wstępu do logiki i teorii mnogości, a więc w trakcie dotychczasowej nauki musieli np. niejednokrotnie samodzielnie uzupełniać luki w rozumowaniach prezentowanych w szkicach dowodów.

Narzędzie badawcze

Narzędzie badawcze stanowił poniższy zestaw pytań i zadań matematycznych. Zestaw pytań zawiera w większości pytania dość trudne. Na niektóre z nich nie można udzielić jednoznacznej odpowiedzi. Udzielenie precyzyjnej i pełnej odpowiedzi na pytania ankiety może sprawić problemy nawet osobom z dużym doświadczeniem matematycznym. Taki dobór pytań był celowy i miał pomóc w ujawnieniu intuicji studentów powstałych na tle ich doświadczeń matematycznych.

Pytania 1 – 4 dotyczą definicji matematycznych, pytania 5–8 twierdzeń matematycznych. W zadaniu 9 zawarto cztery stwierdzenia, które należało ocenić przypisując zdaniom wartość logiczną prawdy lub fałszu. Należało też podać stosowne uzasadnienie odpowiedzi.

Oto pytania kwestionariusza badań.

1. Co to jest definicja matematyczna?
2. Jaką rolę odgrywają w matematyce definicje?
3. Jakie warunki powinna spełniać poprawna definicja?
4. Wymień i podaj przykłady znanych Ci rodzajów definicji.
5. Co to jest twierdzenie matematyczne?
6. Jaką rolę odgrywają w matematyce twierdzenia?
7. Wymień i podaj przykłady znanych Ci rodzajów twierdzeń.
8. Jakie warunki powinno spełniać zdanie, aby było twierdzeniem danej teorii?
9. Oceń prawdziwość następujących stwierdzeń. Swoją odpowiedź uzasadnij!

    - Jeśli liczba n jest liczbą parzystą, to liczba $4n + 3$ jest liczbą nieparzystą.
    - Jeśli pewna liczba naturalna jest podzielna przez 2, to liczba o jeden od niej większa jest nieparzysta.
    - Jeśli każda liczba naturalna jest podzielna przez 4, to każda liczba naturalna jest podzielna przez 2.
    - Jeśli suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi $90°$, to suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi $180°$.

Czas przewidziany na zapisanie odpowiedzi w całym kwestionariuszu badań wynosił 60 minut.

Studentom biorącym udział w badaniach zaproponowano do rozwiązania również następujące zadanie.

Zadanie 1

Na pytanie: Co to jest wartość bezwzględna? uzyskano następujące odpowiedzi. Oceń ich poprawność. Swoją odpowiedź uzasadnij!

a) $|x| = \max(x, -x)$;

b) wartość bezwzględna liczby, to większa spośród liczb: liczby danej i liczby do niej przeciwnej;

c) $|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x > 0 \\ -x & \text{dla} \quad x \leqslant 0; \end{cases}$

d) $|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x > 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$ Ponadto przyjmujemy umowę, że $|0| = 0$;

e) $|x| = x\mathrm{sgn}x$;

f) wartość bezwzględna liczby dodatniej jest tą samą liczbą, wartość bezwzględna liczby ujemnej to liczba do niej przeciwna;

g) wartość bezwzględna to funkcja: tożsamościowa dla liczb nieujemnych, a zmieniająca liczbę na liczbę przeciwną dla liczb ujemnych;

h) wartością bezwzględną liczby nazywamy odległość punktu odpowiadającego tej liczbie na osi liczbowej od punktu odpowiadającego liczbie 0 mierzoną w odcinkach jednostkowych;

i) $f(x) = |x| \iff [(x \geqslant 0 \wedge f(x) = x) \vee (x < 0 \wedge f(x) = -x)]$.

Czas przewidziany na rozwiązanie zadania 1 wynosił 60 minut.

Wyniki badań

W odpowiedzi na pierwsze pytanie badawcze studenci stwierdzali, że definicja to:

- *wytłumaczenie jakiejś prawidłowości, którą się przyjmuje w celu rozwiązania zadania;*
- *wytłumaczenie jakiegoś pojęcia;*
- *formalne wyjaśnienie jakiegoś pojęcia;*
- *przyjęcie pewnego nazewnictwa;*
- *coś co określa pojęcie;*

- *słowne wytłumaczenie jakiegoś pojęcia;*
- *formuła, zdanie określające dane pojęcie;*
- *narzędzie, którym posługuje się nauczyciel do wyjaśniania danych rzeczy;*
- *zbiór informacji na temat pojęcia matematycznego;*
- *pojęcie matematyczne, które wyjaśniamy;*
- *wyjaśnienie znaku matematycznego;*
- *coś co próbuje coś określić.*

Zauważmy, że określenia podane przez badanych, choć przybliżają sens tego czym jest definicja, są tylko częściowe. Terminu definicja używa się bowiem w dwu znaczeniach. W terminologii metodologicznej wyróżnia się definicje *realne* i *nominalne. Pierwsze dotyczą przedmiotów (rozumianych jako indywidua, zbiory indywiduów lub relacje występujące między indywiduami) – ich dziedziną jest nauka, drugie zaś stwierdzają coś o wyrażeniach, a nie o przedmiotach – ich dziedziną jest metanauka* (Gucewicz-Sawicka, 1982).

Na podstawie analizy odpowiedzi studentów można stwierdzić, że utożsamiają oni definicję matematyczną z:

– zdaniem opisującym pojęcie, symbol matematyczny albo regułę (prawidłowość), tj. z definicją realną przedmiotu matematycznego[1];
– zbiorem informacji dotyczących danego pojęcia;
– (definiowanym) pojęciem matematycznym;
– narzędziem, które pozwala prowadzić rozumowania matematyczne.

Badani zauważyli, że definicja jest zdaniem, które wyjaśnia znaczenie nowo wprowadzanego pojęcia. Zwrócili także uwagę, że definiując obiekt matematyczny wprowadzamy nowe nazewnictwo.

Żadna z badanych osób nie zwróciła uwagi na fakt, że definicja jest zdaniem, czy też określeniem jakiegoś pojęcia w ramach danej teorii matematycznej, tj. że definicja może funkcjonować jedynie w szerszej strukturze, w ramach szerszych zależności. Przyczyną tego stanu rzeczy jest, naszym zdaniem fakt, że studenci kończący pierwszy rok studiów mają nadal szkolne spojrzenie na matematykę, gdzie często poprzestaje się na opisie (wyjaśnieniu) definicyjnym znaczenia danego obiektu matematycznego.

Studenci omawiając rolę definicji w matematyce zwrócili uwagę, że definicje:

[1] *Definicja realna przedmiotu to zdanie podające jednoznaczną charakterystykę tego przedmiotu* (Gucewicz-Sawicka, 1982).

- określają pojęcia matematyczne (21 osób);
- tworzą język matematyki, ustalają terminologię matematyczną, pozwalają na skrócenie pewnych zapisów (15 osób);
- są nośnikiem informacji dotyczących pojęcia matematycznego, *pozwalają zrozumieć czym jest dane pojęcie matematyczne* (9 osób).

Wśród odpowiedzi pojawiały się też następujące określenia:

- *dzięki nim rozwiązujemy zadania* (1 osoba);
- *ułatwiają rozwiązywanie zadań* (1 osoba);
- *przedstawiają oczywiste prawdy* (1 osoba).

Studenci zauważyli zatem, że dzięki definicjom możemy rozwiązywać zadania, a więc w istocie prowadzić rozumowania matematyczne. Zwrócili również uwagę na fakt, że podając definicje pojęć staramy się precyzyjnie wyjaśnić to co jest intuicyjnie jasne, oczywiste. Poczucie tego, że definicje *przedstawiają oczywiste prawdy* wynika, naszym zdaniem, ze szkolnych doświadczeń studentów, gdzie często mieli oni do czynienia z sytuacjami, w których wprowadzenie opisu definicyjnego było w istocie, usystematyzowaniem dobrze znanych już uczniom faktów.

Poprawna definicja, zdaniem studentów, powinna:

- zawierać:
  - *nazwę definiowanego pojęcia* (1 osoba);
  - *cechy charakterystyczne dla danego pojęcia* (2 osoby);
  - *założenie i tezę* (1 osoba);
- być:
  - *poprawnie zbudowana* (2 osoby);
  - *zwięzła* (5 osób);
  - *krótka* (3 osoby);
  - *przejrzysta* (3 osoby);
  - *czytelna* (4 osoby);
  - *zrozumiała dla czytelnika* (1 osoba);
  - *sformułowana tak, aby każdy ją mógł zrozumieć* (1 osoba);
  - *jasno sformułowana* (8 osób);
  - *łatwa w zrozumieniu* (7 osób);

– *napisana potocznym językiem* (1 osoba);
– *napisana przystępnym językiem* (3 osoby);
– *przydatna* (5 osób).

Badani zwracali zatem głównie uwagę na precyzję i przystępność definicji. Wskazywali także na język, jakim powinna być napisana definicja. Zwracali więc uwagę na cechy, które z punktu widzenia poprawności definicji nie są najważniejsze. Studenci wspominali także, że poprawna definicja powinna być zrozumiała dla każdego, co z oczywistych powodów nie jest możliwe, choć w szkole tak być powinno. Badani wspominali również o konieczności tego, aby definicja była zbudowana poprawnie, tzn. aby zawierała nazwę definiowanego pojęcia.

Zauważmy, że żaden z badanych nie zwrócił uwagi na problem istnienia obiektu definiowanego czy jego jedyność, a także na to czy definicja opisuje dany obiekt adekwatnie do tego, co chciano zdefiniować, oraz na to czy definicja jest zbudowana poprawnie pod względem syntaktycznym.

Wypowiedź: *poprawna definicja powinna posiadać założenie i tezę*, świadczy naszym zdaniem, o dużych brakach badanego w wiedzy metodologicznej, a w tym o nieodróżnianiu definicji od twierdzeń matematycznych, bądź o braku umiejętności formułowania sądów na temat definicji i twierdzeń matematycznych.

Większość studentów podając przykłady znanych im rodzajów definicji matematycznych wyróżniło definicje:

- *słowne* (12 osób);
- *symboliczne* (13 osób).

Badani wskazywali także na definicje:

- *z rysunkiem* [obok nazwy rodzaju definicji znajduje się trójkąt prostokątny i zapis $a^2 + b^2 = c^2$] (1 osoba);
- *graficzne np. definicja kwadratu* (1 osoba);
- *za pomocą wzoru* (1 osoba).

Kolejne 11 osób podało przykłady określeń pojęć definiowanych w matematyce szkolnej i uniwersyteckiej (np. definicja przestrzeni metrycznej, trójkąta, liczby naturalnej, itd.). Wiele osób zapisało tylko przykładową definicję matematyczną, nie opatrując jej żadnym komentarzem.

Prawie czwarta część badanych (tj. 10 studentów) przyznała, że nie zna żadnych rodzajów definicji.

Zauważmy, że większość badanych podając przykłady znanych im rodzajów definicji dokonuje rozróżnienia ze względu na język jakim zapisano definicje (język symboliczny, język literacki).

Podsumowując omówienie fragmentu prezentowanych wyników można sformułować hipotezę, że wiedza większości badanych dotycząca tego, czym są definicje i jaką rolę odgrywają one w matematyce, jest fragmentaryczna.

Prowadzone przez nas badania ujawniły także duże trudności studentów związane z prawidłową oceną poprawności podanych definicji matematycznych.

Zebrany materiał badawczy, powstały w wyniku analizy rozwiązań zadania 1, pozwala stwierdzić, że praktycznie wszystkie osoby podjęły próbę rozwivzania zadania. Oczywiście, niektóre z nich nie oceniły wszystkich definicji z zadania 1. Studenci oceniali poszczególne definicje przypisując im wartości logiczne prawdy albo fałszu.

Definicje a) i b) uznało za poprawne 8% badanych osób, c) – 69% osób, d) – 78% osób, e) – 10% osób, f) – 2% osób, g) – 61% osób, h) – 83% osób oraz i) – 29% osób. Z danych wynika, że stosunkowo wielu studentów poprawnie przypisało poszczególnym warunkom wartość logiczną.

Podobnie kształtujące się wyniki oceny poprawności definicji a) oraz b) mogą wskazywać, że badani zauważyli podobieństwo dwóch warunków, z których jeden jest zapisany słownie, zaś drugi symbolicznie.

Warto odnotować, że wielu badanych (około 25% studentów) nie oceniło poprawności definicji a), b), e) oraz i). Powodem takiego kształtowania się wyników mógł być, naszym zdaniem, fakt iż w definicji a) posłużono się pojęciem maksimum dwóch liczb rzeczywistych, w definicji b) pojęciem większej spośród dwóch liczb, zaś w definicji e) pojęciem znaku liczby. Można przypuszczać, że pojęcia te nie były operatywnie opanowane przez wielu badanych. Brak podjęcia próby rozwiązania punktu i) można, naszym zdaniem, wiązać z trudnościami studentów związanymi ze zrozumieniem przedstawionej definicji, a więc z brakiem umiejętności analizy warunku zapisanego w postaci symbolicznej. Może to wskazywać na trudności badanych z czytaniem i rozumieniem tekstów matematycznych.

W tym miejscu należy także wspomnieć, że praktycznie wszyscy studenci nie podawali uzasadnień swoich odpowiedzi. Jedynym wyjątkiem był punkt f). Dla tej części zadania 94% badanych stwierdziło, że warunku f) nie można uznać za definicję wartości bezwzględnej. Studenci podali przy tym uzasadnienie, iż *podana definicja nie pozwala na wyznaczenie wartości bezwzględnej liczby* 0. Brak uzasadniania poprawności poszczególnych definicji wartości bezwzględnej można wiązać z trudnościami studentów w wykazywaniu równoważności różnych definicji tego samego pojęcia matematyki szkolnej.

Duże braki studentów kierunku matematyka, związane z umiejętnością oceny poprawności podanych definicji szkolnego pojęcia matematycznego, są niepokojące choćby ze względu na fakt, iż: *Znajomość struktur różnych typów definicji oraz warunków ich poprawności formalnej jest bardzo potrzebna nauczycielowi. W praktyce nauczania musi on analizować, poprawiać i oceniać definicje formułowane przez uczniów, reagować przy różnych okazjach na ewentualne błędy popełniane przez nich w formułowaniu definicji* (Gucewicz-Sawicka, 1982).

Myślimy, że wprowadzające studentów w metodę matematyczną definiowanie i stosowanie definicji, a obok tego ocenianie poprawności i formułowanie definicji spełniających określone warunki dotyczące ich budowy, to ważne elementy kształcenia matematycznego przyszłych nauczycieli. Rozwiązywanie tego typu zadań powoduje lepsze rozumienie samego definiowania pojęć oraz umożliwia powtórzenie i zastosowanie wiadomości i umiejętności z logiki matematycznej.

Badani na pytanie: *Co to jest twierdzenie matematyczne?* udzielali następujących odpowiedzi:

- *wyrażenie, które składa się z założenia i tezy;*
- *prawda rządząca matematyką;*
- *reguła, prawo, które jest zawsze prawdziwe, gdy spełnione są określone założenia;*
- *prawda w matematyce, którą należy udowodnić;*
- *zdanie postaci: Jeżeli ..., to ...;*
- *zdanie, które ma założenie i tezę;*
- *zdanie prawdziwe;*
- *zdanie, które zostało udowodnione.*

Warto odnotować fakt, że wielu studentów w odpowiedzi na pytanie 5 podało informacje dotyczące budowy twierdzeń matematycznych. Badani stwierdzali, że zdanie będące twierdzeniem powinno posiadać założenie i tezę. Osoby te nic nie pisały na temat tego, czy zdanie będące twierdzeniem powinno być prawdziwe. Zauważmy, że jeden z badanych ograniczył twierdzenia do zdań logicznych w postaci implikacji. Z wypowiedzi studentów wynika, że tylko pięciu badanych rozumie twierdzenia „w sensie logiki”, tj. jako zdania prawdziwe (wywiedlne w ramach danej teorii matematycznej), nie zaś w sensie szkolnym, gdzie mówi się o twierdzeniach prawdziwych i fałszywych (Krygowska, 1977).

Badani studenci odpowiadając na pytanie *Jaką rolę odgrywają w matematyce twierdzenia?* stwierdzili, że twierdzenia:

- Opisują własności obiektów matematycznych:
  - *pozwalają zrozumieć i opisać cechy tworów matematycznych.*
- Opisują związki między obiektami matematycznymi:
  - *pozwalają na odkrywanie związków między pojęciami matematycznymi;*
  - *pokazują zależności pomiędzy pojęciami matematycznymi.*
- Stanowią narzędzie przydatne podczas rozwiązywania zadań:
  - *są pomocne podczas rozwiązywania zadań* (*a w tym w dowodzeniu twierdzeń i konstruowania kontrprzykładów*)*;*
  - *pozwalają łatwo dowodzić inne twierdzenia;*
  - *skracają rozwiązania zadań;*
  - *pomagają w szybki sposób orzekać o prawdziwości innych zdań z teorii matematycznej.*
- Stanowią nośnik matematycznej wiedzy:
  - *dają wiedzę, że z pewnych warunków* (*założeń*) *wynika coś* (*teza*).

Osoby biorące udział w badaniach wyróżniały twierdzenia w postaci:

- *równoważności* (9 osób);
- *implikacji* (10 osób);
- *słownej* (9 osób);
- *symbolicznej*, *zawierającej wzory* (5 osób).

Tylko 3 osoby przyznały, że nie znają żadnych rodzajów twierdzeń. Jednocześnie 7 osób podało przykłady twierdzeń matematycznych nie omawiając (nazywając) poszczególnych ich rodzajów. Twierdzenia podane przez tych studentów miały postać implikacji bądź równoważności.

Badani na pytanie: *Jakie warunki powinno spełniać zdanie, aby było twierdzeniem danej teorii?* odpowiadali, że powinno ono:

- *zawierać założenie i tezę;*
- *mieć postać równoważności albo implikacji;*
- *mieć postać: Jeżeli ..., to...;*

- *być zdaniem prawdziwym z punktu widzenia logiki;*
- *zdaniem udowodnionym przy zadanych założeniach;*
- *odnosić się do danej teorii;*
- *musi mieć sprecyzowane warunki, w których zachodzi teza;*
- *mieć założenie, tezę i dowód na podstawie założeń.*

Można tu sformułować hipotezę, że studenci rozumieją twierdzenie jako zdanie, które:

– zawiera założenie i tezę;
– jest w postaci implikacji bądź równoważności;
– jest prawdziwe w sensie o jakim pisze Z. Krygowska[2] albo S. Turnau[3].

Wypowiedź: *zdanie powinno odnosić się do danej teorii* wskazuje, naszym zdaniem, na postrzeganie przez badanego faktu, iż twierdzenia funkcjonują w ramach pewnych teorii matematycznych.

Stwierdzenia z pytania 9 mają formę werbalną, która nie stwarzała badanym trudności podczas analizy struktury logicznej zdań. Poszczególne zdania mają jakby postać ustnych wypowiedzi (mało formalnych), co dla badanych było naszym zdaniem ułatwieniem. Ta forma podania zdań mogła jednak wpływać na mało formalne dowody stwierdzeń.

Stwierdzenie pierwsze wszyscy badani uznali za zdanie prawdziwe. Metody uzasadnienia prawdziwości stwierdzenia były dedukcyjne. Badani prowadzili rozumowania następujących typów.

1.1. Rozumowania, w których uzasadnia się krok po kroku prawdziwość stwierdzenia (liniowe).

Przykład 1

Skoro n *parzysta, to* $4n$ *parzysta, to* $4n + 3$ *nieparzyste.*

Badana osoba wyraźnie przechodzi od założeń do tezy. Można powiedzieć, że badany wykonywał w sposób liniowy, krok po kroku, operacje na dowolnej liczbie naturalnej parzystej.

[2] *terminu twierdzenie używamy w znaczeniu tradycyjnie przyjętym w nauczaniu szkolnym języku. Tak więc mamy twierdzenie prawdziwe – to jest wywiedlne w ramach danej teorii, twierdzenie fałszywe – to takie, którego zaprzeczenie jest wywiedlne w tej teorii* (...) *Zdanie prawdziwe jest zdaniem udowodnionym albo takim dla którego wskazano istniejący dowód* (Krygowska, 1977).

[3] *twierdzeniem teorii opartej na aksjomatyce X nazywamy każde wyrażenie zdaniowe, wywiedlne z wyrażeń zbioru X przy zastosowaniu praw logicznych* (Turnau, 1974).

Przykład 2

$n = 2k, \quad k \in N$
$4n+3 = 4 \cdot 2n+3 = 8n+3$ *liczba nieparzysta, bo suma liczby parzystej i nieparzystej daje zawsze nieparzystą.*
$2k,\ 2 \cdot k + 1,\ 2k + 2k + 1 = 4k + 1.$

Przykład 3

Z: $n \in 2N$,
T: $(4n + 3) \in 2N - 1$.
Korzystając z następujących twierdzeń:
(1) iloczyn dwóch parzystych liczb jest parzysty.
(2) suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta
$4 \cdot n + 3 \in 2N - 1$
na podstawie tw. (1) i (2) teza jest spełniona.

Zaprezentowane rozumowania 2 i 3 bazowały na zapisie symbolicznym liczb parzystych i nieparzystych. W rozwiązaniu z przykładu 3 podano także fakty, na których bazuje dowód.

1.2. Rozumowania obejmujące jednym chwytem myśli informacje zawarte w stwierdzeniu i dowód stwierdzenia (globalne).

Przykład 4 *Suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta.*

Osoba biorąca udział w badaniach prowadzi rozumowanie statyczne, konstatuje – wydaje się że, oczywisty dla niej – fakt.

1.3. Rozumowania bazujące na sprawdzeniu prawdziwości stwierdzenia na przykładzie (indukcja przyrodnicza).

Przykład 5.

Prawda, bo gdy podstawimy 2 mamy $4 \cdot 2 + 3 = 11$ *liczba nieparzysta.*

Osoba pracująca nad zadaniem wnioskuje o prawdziwości stwierdzenia na podstawie sprawdzenia prawdziwości stwierdzenia na przykładzie jednej konkretnej liczby naturalnej.

Rozwiązań typu 1.1 było 25, typu 1.2 – 10, a typu 1.3 – 8.

Stwierdzenie drugie uznało za prawdziwe 35 osób, zaś 7 osób nie podjęło próby rozwiązania podpunktu. Jedna osoba, która uznała zdanie za fałszywe napisała:

Przykład 6

Niektóre liczby podzielne przez 2 są nieparzyste i po dodaniu do nich liczby 1 (liczby nieparzystej) otrzymujemy liczbę parzystą.

Analiza rozumowania zaprezentowanego w przykładzie 6 pozwala stwierdzić, że badana osoba posiada braki w podstawowych wiadomościach matematycznych dotyczących pojęcia liczby parzystej i nieparzystej oraz cech podzielności liczb.

Osoby uznające stwierdzenie za prawdziwe prowadziły rozumowania:

2.1 Rozumowania bazujące na sprawdzeniu prawdziwości twierdzenia na przykładzie (indukcja przyrodnicza).

Przykład 7

Dla 6, $6 + 1 = 7$ *liczba nieparzysta.*

Przykład 8.

Zdanie to jest prawdziwe, np. liczba 8 jest liczbą naturalną i podzielną przez 2, a 1 od niej większa to 9, 9 jest liczba nieparzystą.

Zauważmy, że omawiane stwierdzenie nie jest stwierdzeniem ogólnym, dotyczy ono pewnego obiektu klasy pojęciowej. W badaniach ujawniło się zachowanie badanych polegające na dowolnym ustalaniu obiektu i sprawdzaniu prawdziwości twierdzenia dla dowolnie ustalonej liczby (por. przykład 7 i 8).

2.2. Rozumowania bazujące na oczywistych dla rozwiązującego przesłankach (intuicyjne).

Przykład 9

Każda liczba parzysta jest podzielna przez 2, a kolejna liczba po parzystej jest liczbą nieparzystą. Liczby parzyste i nieparzyste są co druga.

W rozumowaniu wykorzystywano fakt, że liczby parzyste i nieparzyste uporządkowane sv „na zmianę”.

Rozumowań typu 2.1 było 15, a typu 2.2 – 20.

Stwierdzenie trzecie uznało za prawdziwe 39 studentów, pozostałe osoby nie podjęły próby rozwiązania podpunktu.
Badani prezentowali:

3.1. Rozwiązania bazujące na prawach logiki – tautologiach rachunku zdań.

Przykład 10

Z fałszu wynika fałsz, czyli prawda.

Przykład 11

założenie jest fałszywe, czyli prawda.

Studenci prawidłowo zauważyli strukturę zdania (implikacja). Następnie, wykorzystując fakt fałszywości założenia (bądź założenia i tezy) formułowali wniosek, iż zdanie jest prawdziwe.

3.2. Rozumowania bazujące na cechach podzielności liczb.

Przykład 12

Liczba podzielna przez 4 jest podzielna przez 2.

Przykład 13

niech $n \in N$ *i* n *jest podzielna przez 4 wtedy* $a \in N$
$n = 4a = 2 \cdot (2a) = 2u \qquad 2a = u \in N$
liczbę n *można przedstawić za pomocą iloczynu liczby 2.*

W pracach studentów przeważały rozumowania typu 3.1 (było ich 21).

Stwierdzenie 4 uznało za prawdziwe 26 osób, za fałszywe 9 osób. Pozostałe osoby nie podjęły próby rozwiązania tego punktu.

Rozumowania studentów (prowadzące do właściwych wniosków) bazowały na:

4.1. analizie struktury logicznej zdania (implikacja):

– ocenie wartości logicznej poprzednika (albo poprzednika i następnika) implikacji;

– sformułowaniu wniosku: implikacja, której poprzednik (poprzednik i następnik) jest fałszywy jest prawdziwa;

4.2. własnościach czworokąta (każdy czworokąt można podzielić na dwa trójkąty).

Rozwiązań takich było 26, a przeważały tu rozumowania typu 4.1, było ich 15.

Omawiane stwierdzenie jest prawdziwe. Niemniej jednak część studentów uznała je za fałszywe. Ich rozumowania bazowały na

4.3. ocenie wartości logicznej implikacji.

O fałszywości zdania orzekano na podstawie fałszywości:

- poprzednika – *suma miar kątów trójkąta wynosi* 180 *stopni, stwierdzenie fałszywe*;
- następnika – *suma miar kątów czworokąta równa jest* 360 *stopni, fałsz*;

– poprzednika i następnika – *suma miar kątów trójkąta wynosi* 180 *stopni, a czworokąta* 360 *stopni.*

Rozwiązań typu pierwszego było 4, drugiego 3, zaś trzeciego 2.

Podsumowanie

Badania ujawniły braki w wiadomościach i umiejętnościach studentów. Ukazały, że „wiedza teoretyczna" studentów dotycząca definicji i twierdzeń matematycznych jest fragmentaryczna i niespójna.

Studenci, biorący udział w badaniach, w toku weryfikacji prawdziwości stwierdzeń posługiwali się przede wszystkim wyobrażeniami na temat danych pojęć matematycznych. Można powiedzieć, że w toku rozwiązywania zadań korzystali z elementów obrazów pojęć matematycznych. Ich rozumowania były często skrótowe i bazowały na oczywistych dla rozwiązującego przesłankach (niezależnych od wywiedlności tez w ramach określonej teorii matematycznej). Studenci prowadzili więc w większości rozumowania intuicyjne (por. Krygowska, 1977).

Trudności studentów z dowodzeniem prawdziwości stwierdzeń związane były m.in. z wątpliwościami co do celowości dowodu. Niektórzy badani mieli poczucie oczywistości niektórych stwierdzeń (a więc dowód był dla nich oczywisty).

Badani dla uzasadnienia fałszywości stwierdzenia:

- konstruowali stosowne kontrprzykłady;
- stwierdzali, że założenie stwierdzenia jest fałszywe;
- stwierdzali, że teza stwierdzenia jest fałszywa;
- stwierdzali, że założenie i teza stwierdzenia są fałszywe.

Dla uzasadnienia prawdziwości stwierdzenia studenci prowadzili rozumowania bazujące na:

- uzasadnieniu prawdziwości stwierdzenia w przypadku szczególnym (studenci podstawiali konkretne wartości liczb i sprawdzali prawdziwość stwierdzeń dla wybranych wartości) – indukcja przyrodnicza;
- fakcie, iż nie udało się skonstruować kontrprzykładu;
- prowadzeniu rozumowań dedukcyjnych, intuicyjnych (podanie idei dowodu).

Wyniki badań wskazują, że cześć badanych ma kłopoty z rozumieniem istoty hipotetyczno-dedukcyjnej struktury matematyki. Wyniki naszych badań potwierdzają więc wyniki badań B. Noweckiego (1975, 1977) oraz H. Pieprzyk i A. Żeromskiej (2009).

Wszystkie podane w zadaniu 9. zdania miały postać implikacji. Tezy twierdzeń wyrażały własności różnych obiektów matematycznych. Trudności z oceną prawdziwości stwierdzeń mogły mieć źródła w fakcie, że twierdzenia te były w większości twierdzeniami ogólnymi. Dotyczyły one więc każdego obiektu odpowiedniej klasy pojęciowej, a kwantyfikatory nie występowały jawnie (były ukryte w tekście). Właściwa ocena logiczna stwierdzeń oraz prowadzone rozumowanie matematyczne (dowód, konstrukcja kontrprzykładu) zależała od tego czy studenci poprawnie „rozpoznali" kwantyfikator występujący w zdaniu.

Wyniki badań wskazują także, że część studentów kończących pierwszy rok studiów matematycznym nie potrafi analizować tekstów słownych. Można sformułować, za H. Siwek (2005), hipotezę że zbyt formalne nauczanie elementów logiki wpłynęło negatywnie na operatywność wiedzy logicznej studentów.

Wobec ograniczenia badań tylko do analizy odpowiedzi studentów na kilka wybranych pytań i zadań matematycznych oraz ze względu na stosunkowo niewielką grupę osób biorących udział w badaniach, sformułowane wyżej wnioski należy traktować jako częściowo potwierdzone hipotezy, wymagające dalszej weryfikacji. Jednocześnie uzyskane wnioski z badań stanowią podstawę do podjęcia zintensyfikowanych działań mających na celu rozwijanie w umysłach studentów matematyki (a zwłaszcza przyszłych nauczycieli) właściwych obrazów pojęć matematycznych, a także kształtowanie właściwego rozumienia aspektów metodologicznych matematyki.

Literatura

[1] Gucewicz-Sawicka, I. (red.): 1982, *Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

[2] Kąkol, H.: 1984, *Kształtowanie i definiowanie pojęć w zadaniach*, Oświata i wychowanie, 32 – 37.

[3] Kąkol, H.: 1985, *Budowa i rodzaje twierdzeń*, Oświata i wychowanie, 54 – 57.

[4] Konior, J.: 1998, *Budowa i lektura tekstu matematycznego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

[5] Kotarbiński, T.: 1970, *Logika jako szkolny przedmiot pomocniczy*, Studia Logika, XXVI, 99 – 105.

[6] Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, WSiP, Warszawa.

[7] Major, J.: 2006, *Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 29, 297 – 310.

[8] Major, J., Major, M.: 2009, *Remarks on Definitions and the Process of Defining Mathematical Notions*, Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research, Scientific Issues Catholic University in Ruzomberok, 187 – 192.

[9] Nowecki, B.: 1975, *Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich twierdzeń matematycznych i ich dowodów*, Rocznik Komisji Nauk Pedagogicznych, 20, 29 – 64.

[10] Nowecki, B.: 1977, *Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich pojęć twierdzenia i dowodu*, Szkoła Dydaktyki Matematyki, Karpacz, IKNiBO, Wrocław, 53 – 67.

[11] Pieprzyk, H.: 1985, *Aktywny udział uczniów w definiowaniu pojęć*, Oświata i wychowanie, 26 – 34.

[12] Pieprzyk, H, Żeromska, A.: 2009, *Diagnoza wiedzy uczniów szkół ponadgimnazjalnych i studentów matematyki na temat związku twierdzenia z jego dowodem*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II, 183 – 211.

[13] Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

[14] Turnau, S.: 1974, *Logiczny wstęp do matematyki*, WN WSP, Kraków.

[15] Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, WSiP, Warszawa.

Autorzy pracują w Uniwersytecie Pedagogicznym w Kakowie