Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Lidia Zaręba (Kraków)

Wprowadzanie studentów matematyki w badania dydaktyczne

1. Uwagi wstępne

Istotną rolę w kształceniu przyszłych nauczycieli matematyki odgrywa seminarium dyplomowe oraz przygotowanie pracy licencjackiej bądź magisterskiej. Każdy student ma przy tym możliwość wyboru seminarium; swoją pracę dyplomową może związać albo z przedmiotem czysto matematycznym albo z dydaktyką matematyki. Warto przypomnieć, że idea pisania prac dyplomowych z dydaktyki matematyki to efekt starań podjętych przez A. Z. Krygowską; to z jej inicjatywy „rozszerzenie tematycznej oferty prac magisterskich na matematycznych kierunkach nauczycielskich o prace obejmujące tematykę dydaktyczną stało się faktem" (wybrane z: Konior, 2005, s. 68–70).

Z możliwości przygotowywania pracy o charakterze dydaktycznym korzysta wielu studentów; niestety, niejednokrotnie liczba chętnych jest zdecydowanie większa niż oferta skierowana do studentów danego rocznika studiów. Zakres takiej oferty podyktowany jest często względami administracyjnymi. Na inne trudne sytuacje związane z kształceniem nauczycieli matematyki zwraca uwagę Z. Moszner: *Niestety jest wielu matematyków, którzy uważają, że przyszłemu nauczycielowi wystarczy dostatecznie obszerne wykształcenie matematyczne, a przyszła praktyka uczyni z nich dobrych pedagogów* (Moszner, 2004, s. 263). Formułując taką myśl, autor tej wypowiedzi wyraża troskę o *uświadomienie większości* (*wszystkim*?) *kształcącym przyszłych nauczycieli specyfiki takich studiów, tego, że muszą oni uczyć mając ciągle na uwadze działalność, do której przygotowują* (Moszner, 2004, s. 262 – 263). Oczywiście, można uczyć czystej matematyki, wdrażając studentów w tę działalność, w aktywność matematyczną. Słusznym wydaje się jednak stwierdzenie, że absolwenci studiów nauczycielskich mogą – w zależności od wybranego seminarium i tematu pracy dyplomowej – odebrać istotnie różne wykształcenie.

Jako osoba prowadząca od kilku lat seminaria licencjackie i magisterskie sądzę, że niezwykle istotnym jest to, by przyszły nauczyciel matematyki obligatoryjnie przygotował pracę dyplomową z zakresu dydaktyki matematyki. W ramach niniejszego artykułu chcę się podzielić moimi doświadczeniami z pracy ze studentami i przedstawić idee, które przyświecają mi podczas prowadzenia takiego seminarium. Zależy mi na wskazaniu ważnych – z punktu widzenia przyszłej pracy nauczycielskiej – aspektów działalności dyplomantów.

2. Aktywności podejmowane podczas seminarium dyplomowego

W pracy ze studentami staram się korzystać z wypracowanych już doświadczeń dydaktyków. Mam tu na myśli zarówno doświadczenie, którym dydaktycy dzielą się na łamach opublikowanych materiałów (np. Konior, 1993; Stehlikova, 1999) jak i doświadczenie oraz wiedzę współpracowników mających większy niż ja staż pracy. W szczególności biorę pod uwagę to, by podczas zajęć rozwijać u studentów umiejętność *wczuwania się w myślową sytuację innych* (Konior, 1993, s. 37), innymi słowy, by – jak pisze J. Konior, w sposób planowy kreować swego rodzaju poznawczą empatię. Zdaniem autora tej wypowiedzi: *Rozwijanie takiej umiejętności staje się – jeśli brać pod uwagę specyfikę matematyki – jednym z podstawowych komponentów nauczycielskiego kształcenia* (Konior, 1993, s. 37). Znaczenie samoobserwacji podkreślają także uczestnicy Praskiego Seminarium; motywację ku temu krótko ujmuje N. Stehlikova w słowach: *Podczas Praskiego Seminarium dbamy o to, aby badacze (oraz nauczyciele) przechodzili przez podobne sytuacje, jak uczniowie i studenci (zwykle na wyższym poziomie) po to, by lepiej wniknąć w uczniowski proces myślenia* (Stehlikova, 1999, s. 92).

Przygotowanie do zawodu nauczyciela powinno – jak podkreśla S. Machowski (2001, s. 149) – uwzględniać trzy obszary:

- „pogłębienie i poszerzenie, czasem także poznanie nowych wiadomości merytorycznych,
- pewne umiejętności praktyczne oraz
- uświadomienie sobie przez studentów wielu różnych problemów związanych z procesem nauczania – uczenia się”.

W niniejszym artykule skupiam uwagę głównie na dwóch ostatnich obszarach, jakkolwiek nabywanie odpowiedniego przygotowania w jednym z obszarów nie wyklucza podnoszenia kwalifikacji w dwóch pozostałych, wręcz przeciwnie, obszary te mocno wiążą się ze sobą.

Tematyka seminarium, które prowadzę od kilku lat, dotyczy aktywności matematycznych uczniów o różnym poziomie rozwoju intelektualnego. Chodzi o rozpoznawanie i rozwijanie bądź wspieranie aktywności matematycznych u uczniów szkoły podstawowej i gimnazjum, w tym uczniów szkoły masowej oraz uczniów z upośledzeniem umysłowym w stopniu lekkim. Mówiąc o aktywnościach matematycznych, mam na uwadze przede wszystkim dostrzeganie prawidłowości, zależności, a to z kolei wiąże się z uogólnianiem i wyrażaniem efektu takiego uogólniania przy użyciu symbolu literowego.

Prowadząc kurs seminarium dyplomowego staram się tak organizować zajęcia, by studenci mieli okazję do:

1. zgłębiania od strony teoretycznej zagadnień związanych z tematyką seminarium;
2. zapoznawania się z metodologią badań dydaktycznych;
3. stawiania pytań badawczych i samodzielnego wyboru tematu pracy dyplomowej;
4. wypracowywania własnego narzędzia badawczego i samodzielnego analizowania wyników uzyskanych podczas badań empirycznych.

Rozwinięcie powyższych punktów ujmuję w kolejnych paragrafach artykułu.

2.1. Zgłębianie od strony teoretycznej zagadnień związanych z tematyką seminarium

Pierwszym i zarazem niezbędnym etapem prowadzącym do napisania przez studenta pracy dyplomowej jest odpowiednie przygotowanie merytoryczne z zakresu obranej tematyki. Realizacji tego etapu sprzyja analiza literatury i pojęć związanych z tą tematyką. Temu z kolei służy przygotowywanie sprawozdań z literatury czy badań, podejmowanie dyskusji w obrębie danego zagadnienia. W efekcie takiej działalności student w swojej pracy dyplomowej powinien wykazać się znajomością podjętego przez siebie zagadnienia, w szczególności zaś umiejętnością przedstawienia w zwięzły sposób podstaw teoretycznych swojej pracy.

Bazę teoretyczną dla zagadnień związanych z aktywnościami matematycznymi stanowią dla studentów mojego seminarium książki i artykuły naukowe (Krygowska, 1977, 1986; Siwek, 2005), prace monograficzne (Siwek, 1985), publikacje internetowe, w tym także materiały z konferencji naukowych. Z uwagi na to, iż praca empiryczna studentów dotyczyć ma nie tylko aktywności matematycznych uczniów szkoły masowej ale również aktywności uczniów z upośledzeniem umysłowym w stopniu lekkim, studenci sięgają także do literatury z zakresu pedagogiki specjalnej (Gruszczyk-Kolczyńska, 1994; Wyczesany, 1999; Siwek, 1985).

2.2. Zapoznawanie studentów z metodologią badań dydaktycznych

Prace, które powstają w ramach prowadzonego przeze mnie seminarium mają charakter empiryczny. Z tego też powodu, studia nad literaturą związaną z tematem seminarium zmierzają także do zapoznawania studentów z metodologią badań dydaktycznych. Tu ważną rolę odgrywa analiza celów i narzędzi badawczych zastosowanych dla ich realizacji. Z tego punktu widzenia cenne jest sięganie do artykułów z dydaktyki matematyki mających charakter sprawozdań z badań. Charakter taki mają między innymi artykuły publikowane w czasopiśmie Didactica Mathematicae (Swoboda, 2000; Zaręba, 2003). Z omawianego punktu widzenia znaczenie mają także napisane i obronione już prace doktorskie (Zaręba, 2004), magisterskie czy licencjackie. Prace takie mogą nie tylko stanowić źródło poznania metodologii badań dydaktycznych, mogą także inspirować do stawiania nowych dla dyplomanta pytań czy problemów badawczych, do podejmowania zasugerowanych przez autorów takich prac kierunków dalszych badań.

Dla przykładu, jednym z celów badań prowadzonych w ramach mojej pracy doktorskiej (Zaręba, 2004) było rozpoznanie możliwości matematycznych uczniów w wieku 13 – 14 lat w zakresie uogólniania typu indukcyjnego oraz zapisu efektu tego uogólniania z użyciem symbolu literowego. Analiza obserwacji indywidualnych uczniów pracujących nad specjalnie skonstruowanymi zadaniami, mającymi prowokować badanych do aktywności uogólniania, wskazywała na to, iż – w warunkach okazywanej uczniowi pomocy – umiejętność symbolicznego uogólniania indukcyjnego znajduje się w strefie najbliższych możliwości dziecka w podanym przedziale wiekowym. Wszyscy badani, którzy osiągnęli poziom uogólnienia symbolicznego, korzystali bowiem z pomocy udzielonej przez obserwatora. Interwencja tego obserwatora w różnych sytuacjach miała jednak różną wagę; w przypadku niektórych uczniów miała na celu jedynie zwrócenie ich uwagi na popełnioną pomyłkę, innym badanym wskazywała drogę rozwiązania. W związku z taką sytuacją, sugerowałam, iż w przyszłości warto byłoby poddać analizie wszystkie wskazówki obserwatora, by ocenić ich wartość z punktu widzenia najkrótszej drogi prowadzącej ucznia do zamierzonego celu (symbolicznej formy uogólnienia). W ten sposób teorię stref możliwości L. S. Wygotskiego można byłoby nie tylko zobrazować na przykładzie, ale także określić jakiego rodzaju wskazówki, zadania pomocnicze stosować, by osiągnięcie uogólnienia stało się dla ucznia możliwe.

Pomysł ten znalazł odzwierciedlenie w jednej z prac magisterskich[1]. Autorka, podjęła się próby określenia możliwości matematycznych uczniów w zakresie dostrzegania i zapisywania regularności. Stosując inne narzędzie badawcze, kierując je do uczniów pierwszej klasy gimnazjum specjalnego oraz uczniów piątej klasy szkoły masowej oraz stosując metodę obserwacji indywidualnych, magistrantka sformułowała wnioski podobne do tych, które opisałam w mojej pracy; jej zdaniem wskazana aktywność znajduje się w „strefie najbliż-

[1]Zadęcka, A.: 2009, *Dostrzeganie i zapisywanie regularności przez uczniów o różnym poziomie rozwoju intelektualnego*, praca magisterska.

szych możliwości" badanych. Aby jednak nie stawiać każdego ucznia na tym samym poziomie bez względu na rodzaj i ilość pomocniczych pytań, autorka poddała analizie udzielane badanym uczniom wskazówki, sklasyfikowała je i uwzględniając tę klasyfikację, wyodrębniła trzy poziomy strefy najbliższych możliwości w odniesieniu do aktywności dostrzegania i zapisywania prawidłowości przez badanych uczniów. Poniżej przybliżam te poziomy, odwołując się do pytań mających charakter wskazówek pomocnych w rozwiązaniu pewnego problemu:[2]

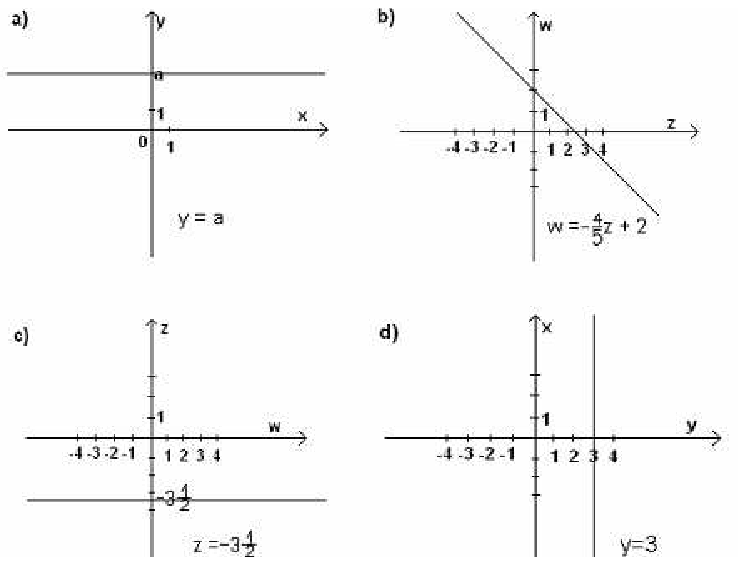
- poziom I, gdy skierowane do badanych pytania mają charakter ogólny i zadawane są w ostatniej fazie rozwiązania zadania (np. *Czy zauważasz jakąś regularność*? *Co wyraża liczba klocków, które tworzą dany kwadrat*?);
- poziom II, kiedy wskazówki mają kierować uwagę ucznia na zależności istniejące w przypadkach szczególnych, a zwłaszcza na związek pojęć, znanych wzorów z docelową zależnością (np. *Narysujmy kwadrat o boku długości* 3 *cm. Co mogę policzyć, gdy mam taką figurę*?);
- poziom III, który wyznaczony jest poprzez pytania szczegółowe, odwołujące się do znanych uczniowi pojęć, dokładne rozpatrywanie przykładów konkretnych zadania i szczegółowe analizowanie uzyskanych danych (np. *Długość i szerokość danej figury już mam, to co mogę obliczyć*? *Mogę obliczyć jaką powierzchnię zajmuję, czyli* ...? *Oblicz pole narysowanego wcześniej kwadratu o boku długości* 3 *cm*).

Zabiegiem, który – w kontekście zapoznawania studentów z metodologią badań – stosuję w ramach mojego seminarium jest analizowanie zestawów zadań użytych jako narzędzia badawcze w opublikowanych już pracach. Szczególnie cenne dla przyszłego nauczyciela matematyki jest, według mnie, rozwiązywanie takich zadań przez studenta. Dzięki temu zabiegowi student z jednej strony przewiduje sposoby rozwiązania zadań przez uczniów i próbuje uświadomić sobie, jakie trudności mogą mieć uczniowie z rozwiązaniem zadań; z drugiej zaś strony takie działanie jest przydatne, by przez pryzmat własnych rozwiązań spojrzeć na narzędzie badawcze oczami badacza. Jeśli bowiem student zapozna się w pierwszej kolejności z zadaniami użytymi w narzędziu, w kolejnym zaś kroku rozwiąże te zadania, to ma możliwość podjęcia próby odczytania intencji badacza.

[2]Zadania skonstruowanego przez magistrantkę narzędzia badawczego odnosiły się do liczb kwadratowych. Treść zadań była krótka, rozbudowywały ją liczne podpunkty. Miały one pomóc badanemu w dostrzeżeniu regularności – liczby będące rozwiązaniem kolejnych fragmentów zadania były liczbami kwadratowymi; innymi słowy – każda taka liczba opisywała pole odpowiedniego kwadratu.

Jedno z przykładowych zadań poddawanych przez studentów analizie ujmuję na rysunku 1. Zadanie to z jednej strony pobudziło dyplomantów do refleksji nad celem, jaki jego autorka chciała zrealizować w badaniach (między innymi uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy uczniowie drugiej klasy gimnazjum dopuszczają możliwość oznaczenia osi odciętych i osi rzędnych innymi literami niż powszechnie stosowanymi w szkole), z drugiej zaś strony – wobec własnych trudności zaobserwowanych podczas rozwiązywania tego zadania – sprowokowało do rozważań na temat sensownością zmiany standardowych oznaczeń osi (x i y) na oznaczenia niestandardowe. To z kolei dało motywację do ponownego studium literatury, tym razem w kontekście zalet i wad przyjmowania w matematyce uprzywilejowanego znaczenia niektórych liter w matematyce (Turnau, 1990; Konior, 1996).

> Które z rysunków: a), b), c), d) przedstawiają wykres funkcji stałej? W każdym przypadku uzasadnij swoją odpowiedź.
>
> Uwaga. Na wszystkich rysunkach argumenty zaznaczamy na osi poziomej, a wartości funkcji na osi pionowej.



Odpowiedzi i uzasadnienia ....

Rys. 1. Fragment skonstruowanego przez dyplomantkę narzędzia badawczego[3]

[3]Michalska, A.: 2007, *Wykorzystanie wybranych zadań z propozycji czynnościowego opracowania symbolu literowego do badania rozumienia tego symbolu przez uczniów drugiej klasy gimnazjum.*

2.3. Stawianie pytań badawczych i samodzielny wybór (przez studenta) tematu pracy dyplomowej

Na aktywność poszukiwania odpowiedniej dla siebie problematyki badawczej zwraca uwagę W. Nowak, która pisze: *Problem rodzi się często w wyniku analizy własnych doświadczeń pedagogicznych (niekoniecznie nauczycielskich), a więc na gruncie praktyki i wizji jej doskonalenia. Początkujący badacz powinien szczególną wagę przywiązywać do etapu poszukiwania odpowiedniego dla siebie problemu badań* (Nowak, 1981, s. 68).

Mając te myśli na uwadze, podczas analizy dostępnych wyników badań niejednokrotnie prowokuję studentów do stawiania sobie pytań: O co jeszcze można byłoby zapytać? Co jeszcze warto byłoby zbadać, zgłębić? Czego jeszcze można byłoby dowiedzieć się w związku z analizowaną sytuacją? Tym sposobem chcę zaszczepić u studentów „żyłkę badacza", w szczególności pobudzić ich do tego, by uszczegółowili czy też uzmysłowili sobie, jakie są ich osobiste zainteresowania badawcze.

Zachęcanie studentów do stawiania sobie własnych pytań badawczych zaowocowało – w kontekście prowadzonego przeze mnie seminarium – tym, że ostateczne tematy prac, choć generalnie związane są z głównym wątkiem seminarium, to jednak realizują odmienne cele badawcze. Z uwagi na rozpiętość artykułu, podjętą przez studentów tematykę jedynie sygnalizuję, podając poniżej tytuły wybranych prac magisterskich lub licencjackich, które dotyczą:

- symboliki literowej, na przykład:
  - O rozumieniu symbolu literowego przez uczniów trzeciej klasy gimnazjum.
  - Badania nad rozumieniem symbolu literowego w kontekście funkcji i zależności funkcyjnych u uczniów o różnym poziomie rozwoju intelektualnego.
  - Wykorzystanie wybranych zadań z propozycji czynnościowego opracowania symbolu literowego do badania rozumienia tego symbolu przez uczniów drugiej klasy gimnazjum.
  - O błędach popełnianych przez uczniów gimnazjum w operowaniu symbolem literowym.
  - O kształtowaniu pojęcia symbolu literowego w różnych jego aspektach.
  - Kształtowanie pojęcia symbolu literowego w wybranych materiałach do nauczania matematyki szkolnej.

- odkrywania prawidłowości, uogólniania, na przykład:
  - Dostrzeganie i zapisywanie regularności przez uczniów o różnym poziomie rozwoju intelektualnego.
  - Propozycja dydaktycznego kształcenia aktywności uogólniania typu indukcyjnego na poziomie uczniów wybranych klas szkoły masowej i szkoły specjalnej.
  - Propozycja dydaktycznego kształcenia różnego rodzaju uogólnień na poziomie uczniów wybranych klas szkoły masowej i szkoły specjalnej.
  - Możliwość wykorzystania podręczników serii „Matematyka 2001" do rozwoju umiejętności odkrywania prawidłowości i kształtowania aktywności uogólniania.
- tematyki powiązanej z zagadnieniami wyjściowymi, na przykład:
  - Badanie wpływu wizualizacji na dostrzeganie i zapisywanie regularności przez uczniów o różnym poziomie rozwoju intelektualnego.

W związku z tym, że na moim seminarium studenci samodzielnie dokonują wyboru tematu pracy, warto uświadomić sobie aspekt oceny pracy studenta. Należy bowiem ocenić pracę pod względem merytorycznym oraz wymienić najważniejsze, zawarte w pracy, osiągnięcia dyplomanta. Szczególnie trudne wydaje się ustosunkowanie się do *nowatorstwa i oryginalności opracowania*[4]. Jak bowiem dobrać tematy (i to tak, by wypływały one od samych studentów – jako odzwierciedlenie ich zainteresowań badawczych), by można było potem właściwie takie prace ocenić? Tu na uwagę zasługują, moim zdaniem, słowa M. Hejnýego, który – próbując odpowiedzieć na pytanie: „Jak poznać, czy idea jest głęboka i oryginalna?" – pisze: „Miara oryginalności i głębokości idei jest subiektywna. Ta sama rzecz jest znana jednej osobie i zaskakuje drugą; dla jednej głęboka, dla innej może być powierzchowna" (Hejný, 1997, s. 154). W mojej interpretacji oznacza to, że jeśli nawet okaże się, iż pewien problem badawczy jest już podjęty, opracowany w literaturze, to sam fakt samodzielnego dostrzeżenia go i poczucia potrzeby rozwiązania go przez studenta jest niezwykle cenny. Dodatkowo, gdyby podjęte przez dyplomanta zagadnienie nie było opracowane w sposób wyczerpujący, to zdaniem W. Nowak (1981,

[4]Obowiązujący w Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie formularz recenzji zawiera między innymi punkt o brzmieniu: „Ocena merytoryczna pracy (sformułowanie problemów, hipotez, dobór metod i narzędzi badawczych, poprawność merytoryczna, nowatorstwo i oryginalność opracowania, dobór i wykorzystanie literatury i innych źródeł, indywidualny wkład pracy dyplomanta)".

s. 68), praca taka nadal może być wartościowa, jako że może mieć ona charakter pracy przyczynkowej. Charakter taki ma jedna z prac licencjackich[5], uzyskane wyniki prezentowane były podczas międzynarodowej konferencji *Childrens' Mathematical Education* (Michalska, Zaręba, 2008).

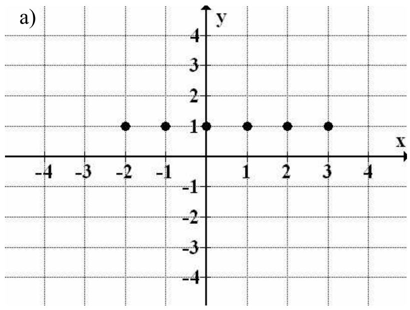
2.4. Wypracowywanie przez studenta własnego narzędzia badawczego i samodzielne analizowanie wyników uzyskanych podczas badania empirycznego

Przygotowanie do etapu wypracowywania własnego narzędzia badawczego dyplomanci zdobywają stopniowo w trakcie zaznajamiania się z publikacjami dotyczącymi badań dydaktycznych, w sytuacjach, kiedy analizują cele już opublikowanych badań, gdy próbują sami przewidywać trudności uczniów biorących udział w badaniach. Studenci, po określeniu celów własnych badań, tworzą swoje propozycje badawcze, kilkakrotnie je weryfikują, dyskutują na temat zadań, pytań badawczych. Pomocne w tym są zarówno dyskusje w gronie seminarzystów, którzy podejmują się rozwiązań danych zadań, jak też próbne badania z uczniami czy też rozmowa z nauczycielem uczącym w klasie, w której badanie ma być przeprowadzone. To wszystko prowadzi do precyzowania narzędzi badawczych, czasem do zmiany wstępnie obranej metodologii. Przykładowo, zaprezentowane na rysunku 1 zadanie zainspirowało jedną ze studentek do przeprowadzenia kolejnych badań dotyczących rozumienia symbolu literowego w kontekście funkcji i zależności funkcyjnych[6] oraz do wypracowania zadania (patrz: rys. 2a, 2b, 2c, 2d), które miało pomóc w odpowiedzi na pytanie: Jak poddani badaniom uczniowie gimnazjum i liceum operują symbolem literowym i czy rozumieją pojęcia, w których jest on zastosowany, jeśli kształt tego symbolu jest inny niż zwyczajowo przyjęty?

> Rysunki przedstawiają wykresy pewnych funkcji, których dziedziną jest zbiór A, natomiast przeciwdziedziną jest zbiór B. Na podstawie przykładu a) uzupełnij pozostałe podpunkty.
> Uwaga: argumenty zaznaczamy na osi poziomej, a wartości funkcji na osi pionowej.

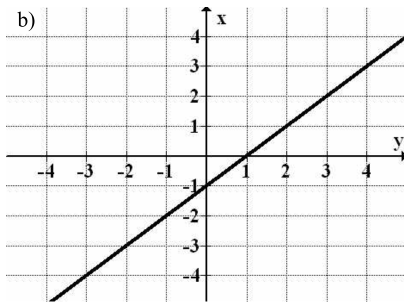
[5] Patrz: przypis 3.

[6] Michulec, J.: 2009, *Badania nad rozumieniem symbolu literowego w kontekście funkcji i zależności funkcyjnych u uczniów o różnym poziomie rozwoju intelektualnego*, praca magisterska.



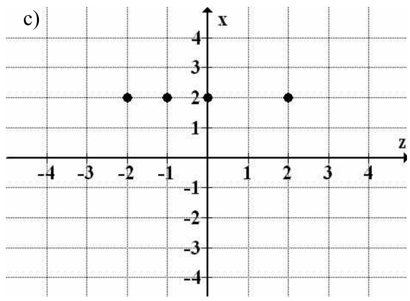
$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$B = \{1\}$

Argument funkcji	$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
Wartość funkcji	$y \in \{1\}$
Wzór ogólny	$y = 1$
Opis słowny	Funkcja ta każdej liczbie ze zbioru $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje liczbę 1.



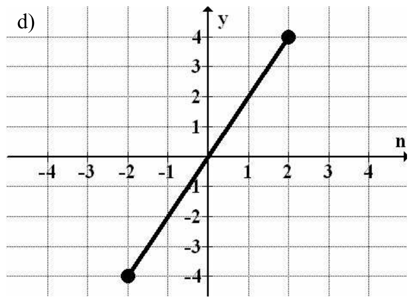
$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Argument funkcji	
Wartość funkcji	
Wzór ogólny	
Opis słowny	



$A = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Argument funkcji	
Wartość funkcji	
Wzór ogólny	
Opis słowny	



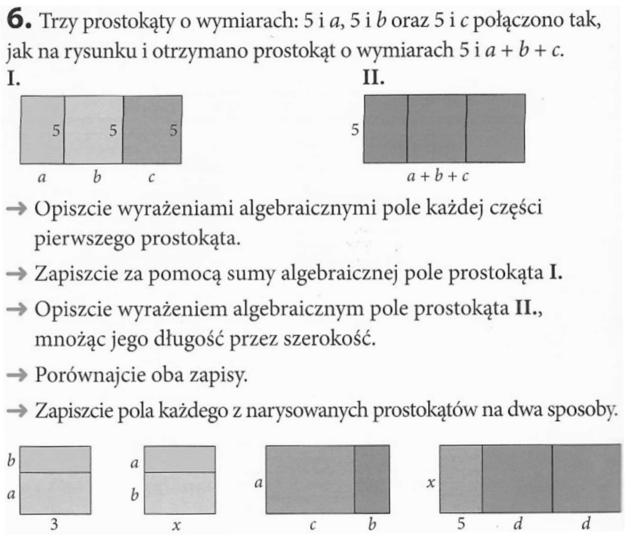
$A = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$B = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Argument funkcji	
Wartość funkcji	
Wzór ogólny	
Opis słowny	Funkcja ta każdej liczbie ze zbioru $< -2, 2 >$ przypisuje jej podwojoną wartość.

Rys. 2. Fragment skonstruowanego przez magistrantkę narzędzia badawczego[7]

[7]Patrz: przypis 6.

Z uwagi na to, że studenci prowadzonego przeze mnie seminarium mieli pewną dowolność w wyborze tematu pracy, formułowali różne cele badawcze, co z kolei prowadziło do stosowania w pracach różnej metodologii. W kontekście stosowanej metodologii zasygnalizuję jedynie te jej aspekty, które wydają się szczególnie wartościowe, czy niezbędne podczas pracy seminaryjnej. Przykładowo, dla oceny możliwości wykorzystania podręczników do kształtowania u uczniów określonego rodzaju aktywności, studenci podejmowali się *analizy wybranego przez siebie zestawu podręczników* do nauczania matematyki na interesującym ich etapie edukacyjnym. Każda tego typu analiza może wzbudzać wątpliwości czytelnika, można bowiem polemizować z przyjętym sposobem klasyfikacji zadań czy poddanych analizie fragmentów wybranych materiałów. Dlatego w kontekście analizy szczególnie wartościowym zabiegiem jest – moim zdaniem – precyzowanie zasad, którymi autor kieruje się podczas analizowania podręczników, w szczególności odwoływanie się do przykładów zadań zakwalifikowanych do wyróżnionej kategorii. Poniżej zamieszczam fragment jednej z prac[8], w której autorka – podejmując się ilościowej i jakościowej analizy podręczników pod kątem prowokowania uczniów do aktywności uogólniania – wyjaśnia na przykładzie wybranych zadań, swoje spojrzenie na te zadania (rys. 3a, 3b). W tym wypadku autorka podaje argumenty przemawiające za tym, by cytowane niżej zadanie zakwalifikować do zadań, które prowokują ucznia do uogólniania twierdzenia poprzez uogólnianie rozumowania.



6. Trzy prostokąty o wymiarach: 5 i a, 5 i b oraz 5 i c połączono tak, jak na rysunku i otrzymano prostokąt o wymiarach 5 i $a + b + c$.

→ Opiszcie wyrażeniami algebraicznymi pole każdej części pierwszego prostokąta.

→ Zapiszcie za pomocą sumy algebraicznej pole prostokąta **I.**

→ Opiszcie wyrażeniem algebraicznym pole prostokąta **II.**, mnożąc jego długość przez szerokość.

→ Porównajcie oba zapisy.

→ Zapiszcie pola każdego z narysowanych prostokątów na dwa sposoby.

[8]Książek, D.: 2006, *Możliwość wykorzystania podręczników serii „Matematyka 2001" do rozwoju umiejętności odkrywania prawidłowości i kształtowania aktywności uogólniania*, praca licencjacka.

> Zadanie to jest, moim zdaniem, przykładem uogólniania twierdzenia poprzez uogólnianie rozumowania. Dotyczy szczególnego przypadku tzn. prostokąta zbudowanego z trzech mniejszych prostokątów o wymiarach: 5 i a, 5 i b oraz 5 i c. Sądzę, że to iż boki prostokątów są opisane częściowo za pomocą symboli (liter), już na początku sugeruje uczniowi, że to czy działamy na liczbach czy na literach jest w tym przypadku nieistotne. Rozumowanie przebiega jak przy ogólnych danych, co uczeń może także zaobserwować w kolejnych przykładach.

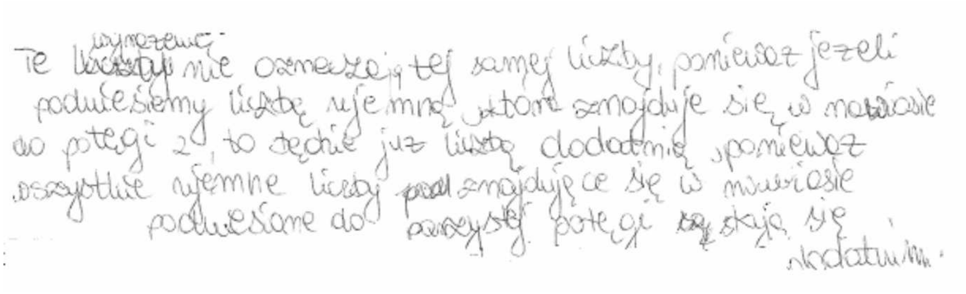
Rys. 3. Fragment pracy licencjackiej odnoszący się do analizy podręczników[9]

W odniesieniu do prac powstałych w ramach opisywanego seminarium, analizę podręczników podejmowali także magistranci, którzy konstruowali własne narzędzie badawcze, a następnie poddawali *ilościowej i jakościowej analizie rozwiązania zadań badawczych* przedstawione przez uczniów określonej próbki. Tak było na przykład w pracy[10], której zasadniczym celem było zbadanie, który z aspektów symbolu literowego sprawia badanym największe trudności oraz opisanie, na czym trudności te polegają. Istotnym w takim przypadku był dobór analizowanych materiałów: stanowiły je takie podręczniki, z których – w trakcie nauki na odpowiednim etapie edukacyjnym – korzystali uczniowie poddani przez magistrantkę badaniom. We wskazanej jako przykład pracy podkreślić także należy *refleksję autorki nad doborem zadań użytych do badań empirycznych oraz powiązanie wyników analizy rozwiązań tych zadań z przeprowadzoną uprzednio analizą podręczników.*

Prace, których autorzy podejmowali się analizy rozwiązań zadań specjalnie skonstruowanych przez siebie testów, nie kończyły się na takiej analizie. Autorzy bowiem często przeprowadzali w kolejnym etapie *rozmowy indywidualne z wybranymi uczniami*, bądź – uwzględniając wyniki przeprowadzonej analizy – *proponowali udoskonaloną wersję skonstruowanego uprzednio narzędzia badawczego*. Pierwsza z dróg była szczególnie cenna w sytuacji, gdy przedstawione przez ucznia rozwiązanie trudno było magistrantowi zinterpretować w kontekście obranego celu badawczego. Tak było na przykład w sytuacji, gdy uczeń trzeciej klasy gimnazjum, odpowiadając na pytanie: „Czy $-k$ i $(-k)$ oznaczają tę samą liczbę?" napisał uzasadnienie (rys. 4), które zainteresowało autorkę badań.

[9]Patrz: przypis 8.

[10]Korczyk, M.: 2006, *O rozumieniu symbolu literowego przez uczniów trzeciej klasy gimnazjum*, praca licencjacka.


Te wyrażenia nie oznaczają tej samej liczby, ponieważ jeżeli podniesiemy liczbę ujemną, która znajduje się w nawiasie do potęgi 2, to będzie już liczbą dodatnią, ponieważ wszystkie ujemne liczby znajdujące się w nawiasie podniesione do parzystej potęgi stają się dodatnimi.

Rys. 4. Fragment odpowiedzi ucznia[11]

Przedstawione przez ucznia uzasadnienie nie było przez studentkę w pełni zrozumiałe, dlatego też badanie zostało uzupełnione o rozmowę indywidualną, którą przedstawiam poniżej.

N: Czy pod literą $-k$ kryją się liczby ujemne?
U: Tak.
N: Jaka byłaby Twoja odpowiedź na zadane przeze mnie pytanie w przypadku, gdybym za k podstawiła konkretną liczbę np: „-3”?
Uczeń chwilę się zastanawiał i wykonał obliczenia:
$-(-3)^2 = -9$, *a* $(-(-3))^2 = 3^2 = 9$,
po czym udzielił następującej odpowiedzi:
U: Wtedy też te liczby nie byłyby sobie równe, ponieważ $-(-3)^2 = -9$, a $(-(-3))^2 = 3^2 = 9$.
N: Dobrze. Więc czy nadal uważasz, że $-k$ to liczba ujemna?
Początkowo uczeń podejrzliwie na mnie spojrzał, po czym wydał z siebie głośne
U: Acha! No tak. Niezależnie od tego jaka liczba znajduje się pod k, czy dodatnia czy ujemna to i tak wyrażenie $(-k)^2$ będzie zawsze dodatnie.
N: Skoro k może być zarówno dodatnie jak i ujemne to czy wiesz jak moglibyśmy nazwać te dwie liczby (*Pytając o te dwie liczby, wskazałam uczniowi wyrażenia* $-k^2$ i $(-k)^2$ *oraz prosiłam o ich nazwanie*) występujące w treści zadania?
U: Liczby przeciwne.

Rozmowy takie jak ta, pozwalały dyplomantom lepiej zrozumieć sposób postępowania ucznia w zadaniu, tym samym dawały światło na możliwości, jakie daje stosowanie różnych metod badawczych.

[11] Wybrany fragment badań pochodzi z pracy magisterskiej: Kucięba, A.: 2009, *Rozumienie symbolu literowego przez uczniów o różnym poziomie rozwoju intelektualnego.*

3. Zakończenie

Obserwacja rozłożonej w czasie działalności, aktywności badawczej studentów podczas ich pracy seminaryjnej daje okazję do obserwowania zmian zachodzących w postawie dyplomanta - przyszłego nauczyciela matematyki. Widoczne jest to w stawianych przez niego pytaniach badawczych, w coraz dojrzalszym podejściu do analizowania wyników prowadzonych badań, w umiejętności prowadzenia dyskusji. Nie oznacza to, oczywiście, że te pozytywne zmiany są wyłącznie wynikiem wyboru seminarium dyplomowego z dziedziny dydaktyki matematyki. Osobowość przyszłego nauczyciela kształtuje się w toku całego cyklu studiów, w tym w trakcie kursu dydaktyki matematyki i przedmiotów z zakresu czystej matematyki. Niewątpliwym wydaje się jednak to, że udział studenta w seminarium z dydaktyki matematyki zdecydowanie poszerza wachlarz doświadczeń pedagogicznych przyszłego nauczyciela matematyki.

Literatura

[1] Gruszczyk-Kolczyńska, E.: 1994, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki, Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa.

[2] Hejný, M.: 1997, *Jak (nie) pisać rozprawy doktorskie z dydaktyki matematyki*, w: Dydaktyka Matematyki nr 19, Roczniki PTM, s. 151 – 156.

[3] Konior, J.: 1993, *Samoobserwacja aktywności myślowej studentów na zajęciach z przedmiotów kierunkowych jako element przygotowania do zawodu nauczyciela matematyki (raport na podstawie doświadczeń z pracy ze studentami kolegium nauczycielskiego)*, w: Dydaktyka Matematyki nr 15, Roczniki PTM, s. 37 – 55.

[4] Konior, J.: 2005, *Niektóre nurty działalności Profesor Anny Zofii Krygowskiej oraz Jej koncepcja dydaktyki matematyki*, w: Dydaktyka Matematyki nr 28, Roczniki PTM, s. 65 – 77.

[5] Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki* cz.3, WSiP, Warszawa.

[6] Krygowska, Z.: 1986, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, w: Dydaktyka Matematyki nr 6, Roczniki PTM, s. 25 – 41.

[7] Machowski, S.: 2001, *Rola prac magisterskich z dydaktyki matematyki w przygotowaniu nauczycieli matematyki w świetle analizy prac wykonanych w IM UAM*, w: Dydaktyka Matematyki nr 23, Roczniki PTM, s. 145 – 151.

[8] Michalska, A., Zaręba, L.: 2008, *From research on understanding a letter symbol by students of a junior high school*, w: Supporting Independent Thinking Through Mathematical Educaton; Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.

[9] Moszner, Z.: 2004, *Refleksje na temat kształcenia nauczycieli matematyki*, w: Dydaktyka Matematyki nr 26, Roczniki PTM, s. 255 – 264.

[10] Nowak, W.: 1981, *Wybrane zagadnienia metodologii badań dydaktyki matematyki*, w: Dydaktyka Matematyki nr 1, Roczniki PTM, s. 61 – 126.

[11] Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

[12] Siwek, H.: 1985, *Naśladowanie wzorca i dostrzeganie prawidłowości w prostych sytuacjach matematycznych przez dzieci upośledzone w stopniu lekkim*, WN WSP, Kraków.

[13] Stehlikova, N.: 1999, *Metody badawcze stosowane przez uczestników praskiego seminarium z dydaktyki matematyki*, w: Dydaktyka Matematyki nr 21, Roczniki PTM, s. 85 – 95.

[14] Swoboda, E.: 2000, *O kształtowaniu się pojęcia matematycznego – studium przypadku*, w: Dydaktyka Matematyki nr 22, Roczniki PTM, s. 109 – 145.

[15] Wyczesany, J.: 1999, *Pedagogika upośledzonych umysłowo. Wybrane zagadnienia*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków.

[16] Zaręba, L.: 2003, *Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku* 10 – 14 *lat*, w: Dydaktyka Matematyki nr 25, Roczniki PTM, s. 151 – 181.

[17] Zaręba, L.: 2004, *Proces uogólniania w matematyce i stosowanie w nim symbolu literowego u uczniów w wieku* 13 – 14 *lat*, Rozprawa doktorska obroniona na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Akademii Pedagogicznej w Krakowie; promotor pracy – prof. dr hab. Helena Siwek.

Autorka pracuje w Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie