Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Maria Legutko (Kraków)

O matematycznym modelowaniu różnych sytuacji przez uczniów gimnazjum i liceum

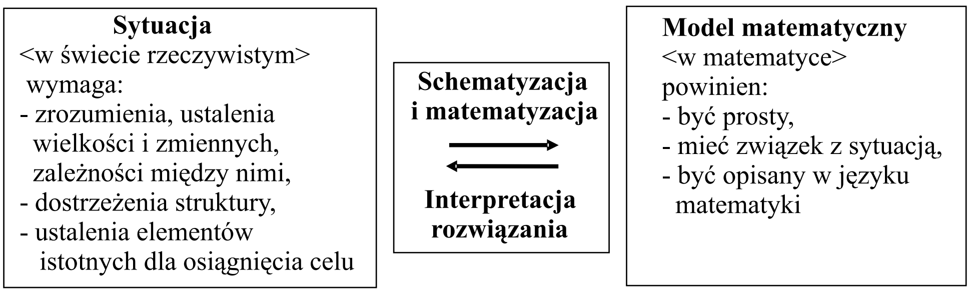
(na podstawie badań)

1. O matematycznym modelowaniu

Model matematyczny można najogólniej określić jako przybliżony, wyidealizowany opis zjawisk fizycznych, ekonomicznych, biologicznych itp. z wykorzystaniem metod matematycznych[1]. Tworzenie matematycznego modelu jakieś sytuacji nazywamy **matematycznym modelowaniem sytuacji**. Rozwiązując problem w jakiejś sytuacji możemy:

- **dobierać (znany nam) istniejący model do tej sytuacji i oceniać jego trafność**;
- **budować model matematyczny do tej sytuacji** uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.

Aktywności w procesie matematycznego modelowania można w ogromnym uproszczeniu przedstawić tak:



Schematyzacja to uświadomienie sobie struktury w danej sytuacji i konstrukcja obiektu strukturalnie podobnego do innego obiektu, z pewnego punk-

[1]Encyklopedia Szkolna Matematyka, 1997, s. 236.

tu prostszego, z pewnego punktu bardziej abstrakcyjnego[2]. Schemat (rysunek, graf, tabelka), przekazuje sens reprezentacji dzięki odpowiedniemu kodowi, przyjętemu ogólnie, albo tylko lokalnie w danej sytuacji. Schemat zawiera zmienne.

Matematyzacja sytuacji wymaga: skojarzeń z pojęciami matematycznymi i relacjami, wyboru parametrów i relacji, przyjęcia upraszczających lub dodatkowych założeń, wyboru języka opisu, przyjęcia oznaczeń, dostrzeżenia analogicznej sytuacji, specyfikacji (konkretyzacji), sprawdzania i weryfikowania, formułowania propozycji (odrzucania nieodpowiednich i stawiania nowych). Ten sam problem, ta sama sytuacja może być rozmaicie matematyzowana, użyte struktury matematyczne w matematyzacji mogą nie być równoważne.

Interpretacja matematycznego rozwiązania w sytuacji jest przejściem od języka modelu do rzeczywistej sytuacji. Jest to powrót do sytuacji już innej od „wyjściowej", bo lepiej rozumianej, inaczej ustrukturyzowanej, w której konkretyzuje się i sprawdza, czy znaleziony w świecie matematycznym obiekt (rozwiązanie np. liczba, figura, równanie, dowód) spełnia dane i wymagane (oczekiwane) warunki, ma sens w tej sytuacji.

W literaturze dydaktycznej zagadnienia związane z matematyzacją, modelami matematycznymi i interpretacją były szeroko dyskutowane w związku z uczeniem „matematyki dla wszystkich" w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku (Freudenthal, 1973; Krygowska, 1981, 1986; Damerow, 1986; Wheeler, 1986; Steiner, 1986) oraz z uczeniem stosowania matematyki w sytuacjach praktycznych (Turnau, 1990), czy z uczeniem zastosowań matematyki (Treliński,1982, 2008). Obszerny przegląd światowej literatury z zakresu matematyki, dydaktyki matematyki oraz innych nauk dotyczący pojęć matematyzacji i modelu zaprezentował Semadeni w czasopiśmie Dydaktyka Matematyki[3]. Szerokiej analizie poddana została w tym artykule **matematyzacja**, jako proces i produkt działalności ludzkiej w samej matematyce oraz przy przechodzeniu od sytuacji z szeroko rozumianego „świata rzeczywistego" (świata przyrody, społeczeństwa i kultury) do matematycznego modelu tej sytuacji. Zwrócona została szczególna uwaga na holenderską koncepcję Freudenhtala i Treffersa **matematyzacji horyzontalnej**, która prowadzi od świata życia do świata symboli, dzięki temu dane zagadnienia z życia staje się dostępne dla aparatu matematyki, i **matematyzacji wertykalnej** w świecie matematyki, gdy to zagadnienie jest przetwarzane z wykorzystaniem matematycznych ak-

[2]Krygowska A. Z.: 1977, Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1, *Pierwotny schemat skierowany do matematyzacji w nauczaniu szkolnym*, s. 48–51; *Interpretacja i zastosowanie* s. 170–174.

[3]Semadeni Z.: 2003, *Spłaszczenie się hierarchii pojęć, horyzontalne i wertykalne składowe matematyzacji i wieloznaczność terminu „model"*, Dydaktyka Matematyki 25, s. 111–150

tywności, pojęć i metod albo nowe pojęcia są kształtowane i wypracowywane są nowe metody rozwiązania.

Charakteryzując modelowanie matematyczne Z. Semadeni (2003, s. 113) podkreśla, że:

1. matematyzacja dotyczy **konkretnego problemu** bądź zespołu problemów;
2. obejmuje **cały proces** prowadzący od pierwotnej sytuacji z rzeczywistości do modelu z koniecznością powrotu z modelu do wyjściowego problemu;
3. szczególnie ważna jest dziś rola **komputerów** w tym procesie.

W takim ujęciu schematyzacja i interpretacja są elementami matematyzacji. Tak je możemy traktować na etapie spłaszczenia się pojęcia matematyzacji, gdy dysponujemy już wiedzą i doświadczeniem w matematycznym modelowaniu. Jednak w uczeniu matematycznego modelowania, wyróżnienie schematyzacji, tworzenia schematu dla rzeczywistego układu stosunków danej sytuacji, który nie od razu jest schematem matematycznym, ale jest ukierunkowany na późniejszą matematyzację, jest ogromnie ważne. Na tym etapie często występują czynności konkretne, przeliczanie, porównywanie, mierzenie, porządkowanie elementów, strukturyzowanie, a czasem także doprecyzowanie pytania, wyróżnienie zmiennych, obserwowanie jak się zmieniają, od czego zależą, zanim nastąpi ich opis z użyciem języka matematyki (to jest istotnym elementem matematyzacji horyzontalnej). Błędy tu popełnione powodują wiele trudności pojęciowych u uczniów. Podobnie jest z interpretacją rozwiązania, w jednym aspekcie jest to sprawdzanie czy matematyczne rozwiązanie jest poprawne a w drugim, czy ma sens w kontekście sytuacji. Zaobserwowano wiele **trudności w procesie modelowania**, oto niektóre z nich (Treliński, 2008)[4].

- Dwuznaczności metodologiczne (utożsamia się pojęcia i obiekty realne z obiektami matematycznymi, przyjmuje intuicyjne lub wyobrażone cechy sytuacji, jako istotne).
- Brak jasnych kryteriów matematyzacji (nie dyskutuje się ani nie podaje jasno, według jakich kryteriów konstruuje się model, jakie przyjmuje się oznaczenia dla zmiennych i zależności).
- Lekceważenie innych modeli (eksponuje się tylko jedno „najlepsze” rozwiązanie, nie dyskutuje się założeń).

[4]Treliński G., Od rzeczywistości do matematyki – trudności modelowania, Referat wygłoszony na 21 konferencji SNM, Kielce 2008.

- Zachwianie równowagi między wynikiem badania a procesem konstrukcji modelu (koncentruje się na wyniku a nie na metodzie, brakuje refleksji nad procesem konstrukcji modelu).
- Błędy w ocenie modelu (w numerycznych modelach pomija się sprawę błędu, np. dokładność rozwiązania mierzy się liczbą cyfr po przecinku, bez zastanowienia czy to ma sens).

Uczeń musi wiedzieć, kiedy tworzy model, kiedy bada model środkami matematycznymi, kiedy interpretuje matematyczne rozwiązanie. Orientację w tym złożonym procesie mogą ułatwiać mu takie porównania, jak na przykład: matematyzacja jest „pomostem między światem realnym a światem matematyki" (Treliński, 2008) albo, że jest „porządkowaniem pewnej rzeczywistości środkami matematycznymi" (Freudenthal, 1973).

2. O uczeniu matematycznego modelowania

Modelowanie matematyczne, jako jeden z celów i wymagań ogólnych kształcenia matematycznego został sformułowany w Podstawie Programowej z 23 grudnia 2008 dla trzech etapów kształcenia. Na każdym etapie cel ten został nieco uszczegółowiony i w ten sposób określony został proces wprowadzania ucznia w matematyczne modelowanie w czasie dziewięciu lat nauczania matematyki – od czego rozpoczynać, czego wymagać na każdym poziomie i do czego zmierzać.

Etap kształcenia	Umiejętności ucznia
W szkole podstawowej w klasach IV – VI	uczeń dobiera odpowiedni model matematyczny do prostej sytuacji, stosuje poznane wzory i zależności, przetwarza tekst zadania na działania arytmetyczne i proste równania
W gimnazjum	uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji
W szkole pogimnazjalnej:	
na poziomie podstawowym	uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu
na poziomie rozszerzonym	Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia

Otrzymujemy w tym dokumencie[5] informację, że modelami matematycznymi, którymi uczeń ma się posługiwać mogą być działania arytmetyczne,

[5]Podstawa Programowa kształcenia ogólnego z dnia 23 grudnia 2008 s. 41 dla szkoły podstawowej, dla gimnazjum i szkół pogimnazjalnych s. 182, 185 – 186.

równania, wzory i zależności. Rozwiązując problem w jakiejś sytuacji uczeń może dobierać model do tej sytuacji i oceniać jego trafność albo budować model matematyczny do sytuacji uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.

Jaki stopień opanowania umiejętności w tym zakresie ujawniają uczniowie rozwiązując zadania, pokażę w dalszej części (2.1 i 2.2) opisując krótko dwa badania diagnostyczne.

2.1. O dobieraniu matematycznego modelu do danej sytuacji

W trakcie przygotowania się do egzaminu gimnazjalnego uczniowie rozwiązywali zestaw zadań „Remont pokoju"[6]. Wydawać by się mogło, że jest to dobrze znana sytuacja dla 16–1etnich uczniów. W zestawie tym, wśród zadań o malowaniu powierzchni ścian, podłóg pojawiło się zadanie:

> Kasia uczy się tańczyć w kółku baletowym i dużo czasu spędza przed lustrem. Rodzice postanowili kupić jej duże lustro o wymiarach 2,2 m x 2,2 m. Czy można przenieść je do pokoju Kasi przez drzwi o wymiarach 2,1 m x 0,9 m? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie rozwiązywało 72 uczniów trzech klas trzecich gimnazjum, w marcu 2009 roku. Spośród nich: 30 rozwiązało zadanie poprawnie (42%), 9 częściowo poprawnie, 30 niepoprawnie i 3 nie podjęło prób. Zadanie to okazało się trudne, współczynnik łatwości tego zadania był mniejszy od 0,50. Rysunek schematyczny do zadania wykonało 35 uczniów a 32 stosowało twierdzenie Pitagorasa.

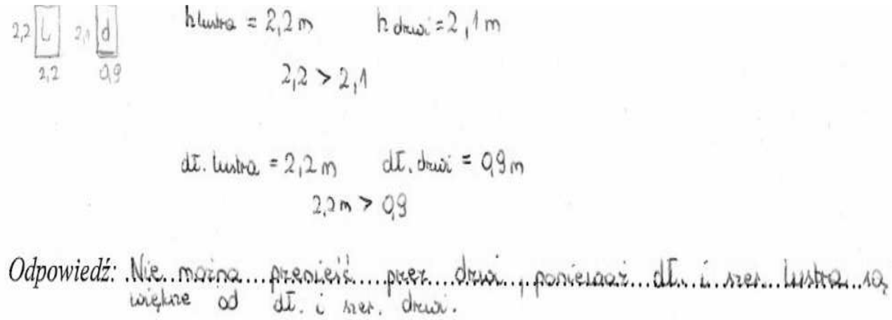
Modele, jakie uczniowie kojarzyli z sytuacją przedstawione są w tabeli.

Zastosowane modele	Liczba uczniów (N=72)
Porównanie długości dwóch odcinków: wysokości lustra i wysokości drzwi przekątnej lustra i przekątnej drzwi wysokości lustra i przekątnej drzwi	 10 (14%) 2 30 (42%)
Porównanie pól prostokątów: powierzchni lustra i powierzchni drzwi	 12 (17%)
Porównanie obwodów prostokątów (lustra i drzwi)	2
Niezastosowany model lub trudno to ustalić, na przykład praktyczne rozwiązanie	10 6

[6]Ochałek M.: 2009, *Aktywności ucznia ujawnione przez uczniów trzeciej klasy gimnazjum w rozwiązaniach serii zadań „Remont pokoju"*, praca magisterska pod kierunkiem M. Legutko, UP Kraków.

Przykłady rozwiązań uczniowskich

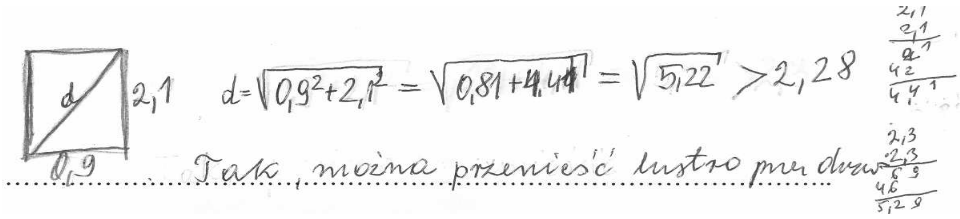
Przykład 1



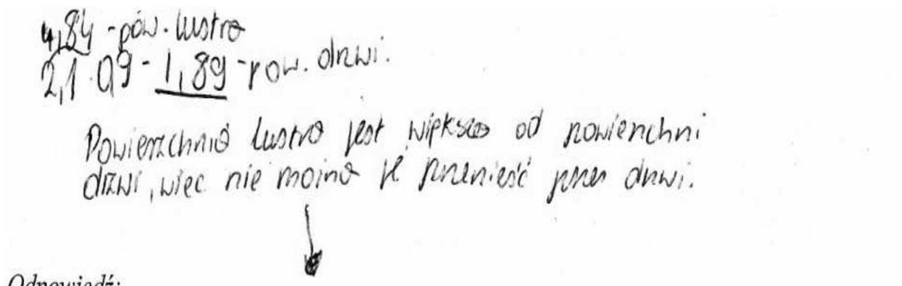
Przykład 2

Przekątna będzie wynosiła więcej niż 2,1 m *a mniej niż* 2,5 m, *więc lustro się zmieści.*

Przykład 3



Przykład 4



Przykład 5

Powinno się dać przenieść, wystarczy przechylić lustro.

Jakie uczniowie ujawnili trudności związane z matematyzacją tej sytuacji?

- Pobieżne zapoznanie się z treścią zadania nasuwa wątpliwość: „czy tak duże lustro można przenieść przez takie małe drzwi?”(pytanie z obserwacji indywidualnej). Stąd może wynikać skojarzenie ze źle dobranym modelem matematycznym, liczenie pola okna i pola drzwi oraz wniosek (jak w przykładzie 4).
- Około 1/3 uczniów miała trudności z wyróżnieniem wielkości, które trzeba było porównywać (pola, obwody, czy odcinki). Niektórym z tych, którzy porównywali odcinki zabrakło praktycznego zrozumienia sytuacji. Skojarzyli, że najdłuższy odcinek w prostokącie to przekątna, ale porównali przekątną lustra i przekątną drzwi albo wysokość i szerokość drzwi z wysokością i szerokością lustra.
- Dla niektórych uczniów było to zadanie praktyczne (rozwiązanie jak przykładzie 5), w którym nie odczuli potrzeby podania (użycia) jakiegoś matematycznego argumentu. Nie byli też pewni swojego rozwiązania („powinno się dać”).
- Dla największej grupy uczniów (jednak mniejszej niż połowa) zadanie było okazją do wykorzystania matematycznej wiedzy w praktyce, skorzystania z twierdzenia Pitagorasa dla obliczenia długości odcinka.
- Niektórzy uczniowie nie potrafili podać długości najdłuższego odcinka w prostokącie, bo popełniali błędy w twierdzeniu Pitagorasa albo mieli trudności z oszacowaniem pierwiastka kwadratowego z liczby 5,22 chociaż mogli korzystać z kalkulatora. (Przykład 3. ujawnia niektóre z tych trudności).
- Zapisy rozwiązań pokazują również, że uczniowie podejmowali matematyzację lub interpretację tylko w jednej próbie i stwierdzali, że jest to możliwe albo nie. Nie dostrzegali innych możliwości.

Opisany przykład ukazuje, że korzystanie z matematycznego modelu w prostych sytuacjach wielu uczniom sprawia trudności. Mogłoby się wydawać, że była to nowa sytuacja dla ucznia[7], ale w codziennych sytuacjach musi on nieraz rozstrzygnąć: czy linijka zmieści mu się w piórniku, czy długa listwa zmieści się w bagażniku samochodu lub w windzie albo może go zastanowić, dlaczego w myszce do komputera, bateria ułożona jest po skosie.

Dobre rozumienie sytuacji i postawionego w niej pytania, ustalenie wielkości i zależności między nimi (co trzeba porównać), ale też wiedza (twierdzenie

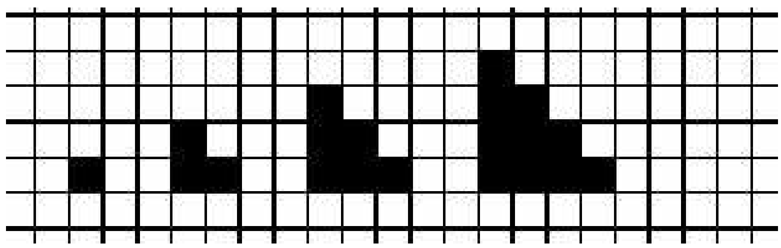
[7]Uczniowie mogli nawet się spotkać z podobnym zadaniem w podręczniku np z. 3 s. 134 w „Matematyka z plusem” dla klasy 2.

Pitagorasa) i umiejętności (obliczenia długości niewymiernej i jej oszacowanie) są niezbędne w rozwiązaniu tego zadania. To jest konieczne w rozwiązaniu każdego innego problemu. Potrzebna jest też schematyzacja (uproszczenie: wystarczy porównać dwa odcinki, które(?)), matematyzacja (przekątna i bok prostokąta, wyznaczanie długości tych odcinków) i interpretacja rozwiązania z powrotem do rzeczywistości (przekątną, czego uwzględniać lustra czy drzwi)[8]. W szkolnej rzeczywistości pojawia się zapotrzebowanie na dobre do modelowania sytuacje.

2.2. Dostrzeganie i budowanie matematycznego modelu w różnych sytuacjach przez 16 – 17 letnich uczniów

Do badania procesu matematycznego modelowania wybrane zostały cztery sytuacje, dwie z kontekstem realnym (2 i 3) i dwie matematyczne (1 i 4) o wspólnym matematycznym modelu, w którym szukaną liczbę odcinków (powitań, rozmów, kwadratów) opisuje wyrażenie: połowa iloczynu dwóch kolejnych liczb naturalnych, gdy n oznacza liczbę punktów (osób, abonentów albo n-tą z narysowanych figur). Oto te sytuacje:

1) *Ile odcinków łączy n punktów, każdy z każdym, na płaszczyźnie?*
2) *Ile będzie powitań (jedno powitanie, to uścisk dłoni dwóch osób), gdy witać się będzie n osób, każda z każdą?*
3) *Ile jest możliwych rozmów telefonicznych pomiędzy n abonentami, gdy każde połączenie między dwoma abonentami uznamy, jako jedną rozmowę?*
4) *Z ilu kwadratów jednostkowych będą zbudowane „n-te schodki", gdy są budowane według reguły pokazanej dla czterech pierwszych „schodków" na rysunku poniżej?*



[8]Zanim kupimy lustro zmierzymy w przybliżeniu, jaka jest długość „przekątnej w drzwiach" i porównamy z wysokością lustra, i będziemy się zastanawiać jak przewieźć i wnieść lustro. Czy będziemy się zastanawiać, jakiej matematyki tu użyliśmy, czy „przekątna drzwi" jest liczbą wymierną czy niewymierną?

Sformułowane zostały szczegółowe pytania badawcze.

- Czy uczniowie łatwiej dostrzegają wspólny model w sytuacjach z kontekstem realnym (r) czy sytuacjach matematycznych (m)?
- Czy potrafią opisać model w postaci wyrażeń algebraicznych lub równań?
- Czy potrafią uzasadnić zależność, która uzyskali?

Informacje o badaniach i wynikach

Metodą badań była:

- analiza dokumentów: rozwiązania zadań 114 uczniów z klas trzecich gimnazjum i klas pierwszych liceum oraz odpowiedzi 47 uczniów na dwa pytania, których udzielili po rozwiązaniu zadań;
- obserwacja indywidualna 3 uczniów rozwiązujących zadania (dobrego z matematyki, średniego i poniżej średniego).

Do tych czterech sytuacji opracowane zostały karty pracy dla ucznia, w których sformułowano zadania i polecenia oraz pytania. Przykład karty pracy do sytuacji 2).

a) *W pomieszczeniu znajdują się* 3 *osoby. Ile będzie powitań* (*jedno powitanie to uścisk dłoni dwóch osób*), *jeśli każda powita się z każdą*? *A ile byłoby powitań, gdyby było*:
b) 5 *osób*
c) 7 *osób*
d) 20 *osób*?
e) n *osób.*
Odkryty wzór dla n osób uzasadnij.

Po rozwiązaniu zadań uczniowie odpowiadali na dwa pytania:

1. *Które zadania uważasz za podobne*? *Zaznacz krzyżykiem w tabelce.*

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

2. *Napisz, w czym te zadania są podobne*?

Organizacja badań

W wyniku obserwacji indywidualnej uczniów rozwiązujących zadania ustalony został czas, potrzebny na rozwiązanie wszystkich zadań i doprecyzowane zostały sformułowania zadań w kartach pracy. Uczniowie[9] otrzymywali cztery karty pracy z zadaniami i dwa pytania, pracowali godzinę lekcyjną, nie zgłaszali prośby o przedłużenie czasu pracy. Uczniowie pytali, *co to znaczy uzasadnić wzór*? Uzyskiwali odpowiedź, by zapisali rozumowanie jak odkryli wzór, jak do niego doszli. Po rozwiązaniu zadań, uczniowie chcieli o tych zadaniach rozmawiać. Najczęściej pytali: *czy otrzymali dobry wzór*? Twierdzili, że takich zadań nie rozwiązywali wcześniej, czego nie potwierdzają ich rozwiązania, bo wielu korzystało ze wzoru na liczbę przekątnych w wielokącie. Gimnazjaliści twierdzili, że zadania nie były trudne a licealiści, że były trudne. Informacje te potwierdzają współczynniki trudności zadań[10] w tabeli poniżej.

Wyniki badań

Zadania okazały się trudne lub umiarkowanie trudne zarówno dla uczniów gimnazjum, jak i uczniów liceum.

Współczynnik trudności zadań	Zadanie 1(m) umiarkowanie trudne	Zadanie 2 (r) umiarkowanie trudne	Zadanie 3(r) trudne	Zadanie 4(m) trudne
Gimnazjum	0,50	0,57	0,47	0,33
Liceum	0,53	0,57	0,46	0,29

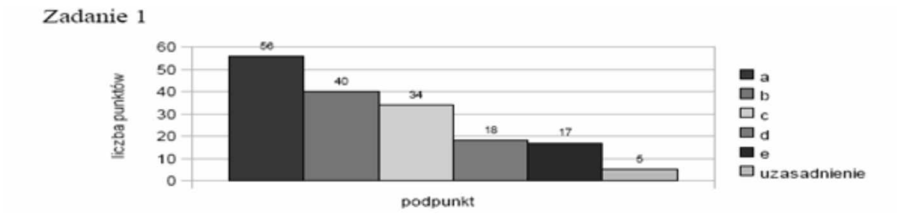
Zadania matematyczne (1 i 4) rozwiązało średnio 43% uczniów, a zadania z kontekstem realnym (2 i 3) nieco więcej bo 51% uczniów. Nie jest to jednak taka różnica, by można wnioskować, że wypadły lepiej zadania z realnym kontekstem. Szczegółowe wyniki dla poszczególnych zadań i ich podpunktów przedstawiają wykresy na rysunkach na kolejnych stronach[11].

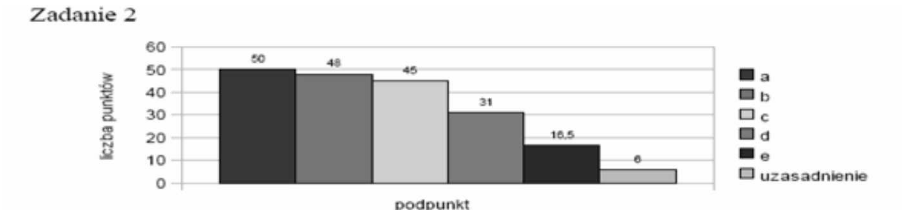
[9] W badaniach wzięło udział 57 uczniów z 1. klas liceum w Krakowie, w listopadzie 2008 roku i 57 uczniów z 3. klas gimnazjum w Trzebuni i w Krakowie, w lutym 2009 roku.

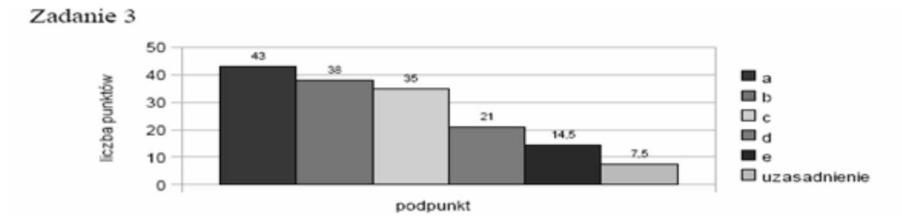
[10] Centralna Komisja Egzaminacyjna przyjmuje taką charakterystykę zadań za pomocą współczynnika łatwości: 0,00 – 0,19 zadanie bardzo trudne; 0,20 – 0,49 trudne; 0,50 – 0,69 umiarkowanie trudne; 0,70 – 0,89 łatwe; 0,90 – 1,00 bardzo łatwe.

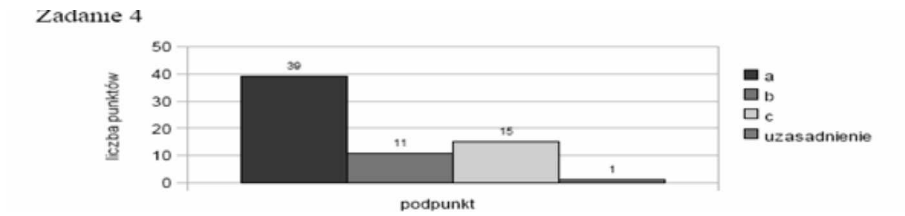
[11] Źródło wykresów: A. Smolec, *Dostrzeganie matematycznego modelu w zadaniach matematycznych i w zadaniach z realnym kontekstem przez uczniów* (*trzeciej klasy gimnazjum i pierwszej klasy liceum*), Praca magisterska pod kierunkiem M. Legutko, UP Kraków, 2009.

Gimnazjum (liczba uczniów N = 57)

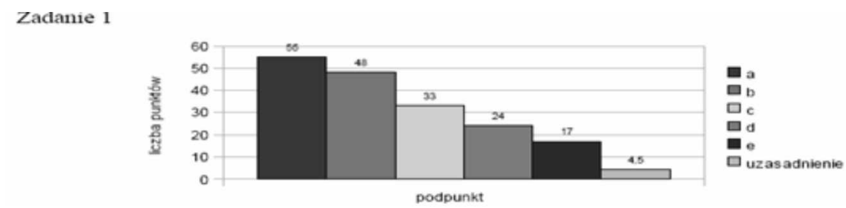




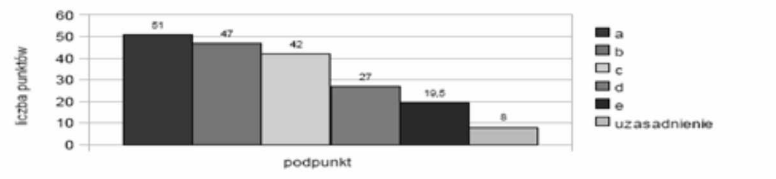




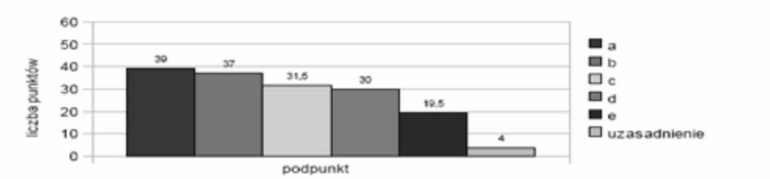
Liceum (liczba uczniów N=57)



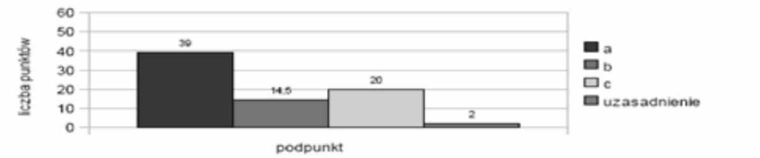
Zadanie 2



Zadanie 3



Zadanie 4



Dalsze informacje o wynikach zostały sformułowane dla wszystkich 114 uczniów, ponieważ wyniki uczniów gimnazjum i liceum niewiele się różniły.

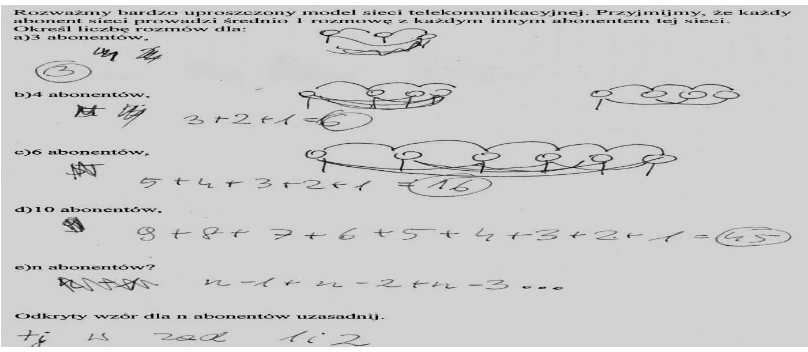
Zadania dla małych konkretnych liczb (podpunkty a i b w zadaniach 1 – 3 i podpunkt 4a) poprawnie rozwiązywało średnio 84% uczniów, dla większych liczb ($n = 10, 15, 20, 100$) rozwiązało średnio 39% uczniów. Dla małych liczb uczniowie pomagali sobie rysunkami, schematami, przeliczali i zapisywali za pomocą liczb i działań dostrzeżone regularności. Dla większych liczb opierali się na obliczeniach, popełniali błędy i nie zawsze je weryfikowali, ujawniali bezradność w zaplanowaniu obliczenia sumy kolejnych liczb naturalnych od 1 do 20, od 1 do 100.

Uogólnienie dla dowolnego n we wszystkich czterech zadaniach (podpunkty 1e, 2e, 3e i 4c) zapisało 15 uczniów (13% badanych) i tylko jedna z tych osób podała uzasadnienia dla wszystkich uogólnień. W trzech zadaniach uogólnienie podało 11% uczniów. Łącznie, w co najmniej trzech zadaniach podało uogólnienie 24% uczniów. Można ten wynik zinterpretować w ten sposób, że tylu z badanych uczniów potrafiło uogólnić i zbudować model matematyczny w podobnych sytuacjach (w 3 lub w 4 przypadkach na 4). Uczniowie pisali zależność w postaci wyrażenia algebraicznego i traktowali je, jako wzór. Poprawne uogólnienie w zadaniu czwartym podało 31% uczniów, gdyż kilku uczniów skojarzyło liczenie kwadratów jednostkowych z polem figury. Co najmniej w jednym zadaniu poprawne uogólnienie podało 45% uczniów. Zatem więcej niż połowa uczniów nie potrafiła podać żadnego poprawnego uogólnienia a 14% uczniów w żadnym z czterech zadań nie podjęło próby uogólnienia, ograniczyło się tylko do liczenia dla konkretnych danych liczb. Uzasadnienie poprawne w każdym z czterech zadań podał tylko 1 gimnazjalista, w trzech zadaniach uzasadniło poprawnie 2 uczniów. Co najmniej w jednym zadaniu podało poprawne uzasadnienie 9 uczniów (8% badanych).

2.2.1. O uogólnianiu i dostrzeganiu wspólnego modelu

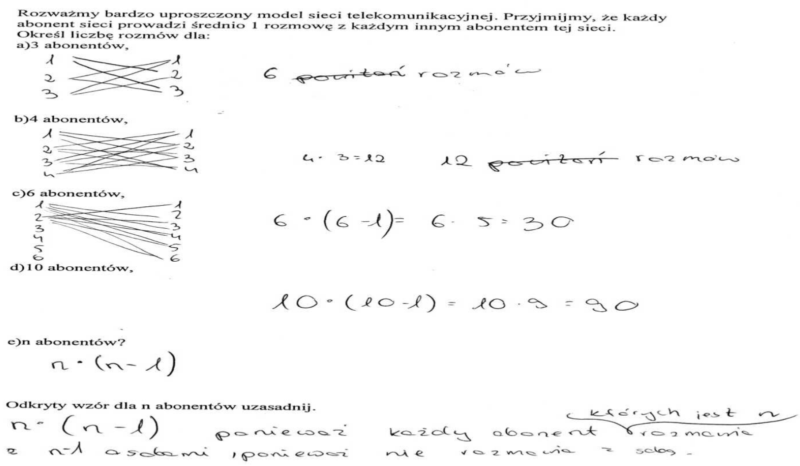
Proces schematyzacji i matematyzacji przeprowadzony przez ucznia liceum oraz błąd w uogólnieniu w zadaniu 3 przedstawia przykład poniżej.

Przykład 6


Rozważmy bardzo uproszczony model sieci telekomunikacyjnej. Przyjmijmy, że każdy abonent sieci prowadzi średnio 1 rozmowę z każdym innym abonentem tej sieci.
Określ liczbę rozmów dla:
a)3 abonentów,
3
b)4 abonentów,
3+2+1=6
c)6 abonentów,
5+4+3+2+1 = 16
d)10 abonentów,
9+8+7+6+5+4+3+2+1=45
e)n abonentów?
n-1+n-2+n-3...
Odkryty wzór dla n abonentów uzasadnij.
tj w zad 1 i 2

Inny sposób schematyzacji i matematyzacji oraz inny przykład błędu ilustruje kserokopia pracy ucznia liceum.

Przykład 7


Rozważmy bardzo uproszczony model sieci telekomunikacyjnej. Przyjmijmy, że każdy abonent sieci prowadzi średnio 1 rozmowę z każdym innym abonentem tej sieci.
Określ liczbę rozmów dla:
a)3 abonentów,
6 ~~połączeń~~ rozmów
b)4 abonentów,
4 · 3 = 12 12 ~~połączeń~~ rozmów
c)6 abonentów,
6 · (6-1) = 6 · 5 = 30
d)10 abonentów,
10 · (10-1) = 10 · 9 = 90
e)n abonentów?
n · (n-1)
Odkryty wzór dla n abonentów uzasadnij.
n · (n-1) ponieważ każdy abonent (których jest n) rozmawia z n-1 osobami, ponieważ nie rozmawia z sobą.

Uogólnienia podane przez uczniów w zadaniach 1, 2, 3 oraz w zadaniu 4 zestawione są w tabeli poniżej.

Zapis symboliczny w zadaniach 1, 2, 3	Liczba uogólnień
$\frac{1}{2}n(n-1)$	24
$\frac{1}{2}\cdot(n-3)\cdot n+n$	9
$(n\cdot n-n):2$	2
$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1$	2
Zapis symboliczny w zadaniu 4	
$n(n+1):2$	23
$(n^2+n):2$	3
$[n\cdot(n-1):2]+n$	2
$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1$ albo $n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+(n-(n-1))$	3

Uogólnienie oparte na rozumowaniu indukcyjnym zapisało 15 uczniów w postaci sumy nieskończonej $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots$, jakby nie dostrzegli, że w ich konkretnych przypadkach sumowanie kończy się na dodaniu liczby 1. Niektórzy z nich ujawnili trudność z zapisem symbolicznym zaobserwowanej zależności i dopisywali słownie: *dodajemy kolejne liczby, gdzie pierwsza jest o jeden mniejsza od liczby osób, a następne o jeden mniejsze od poprzedniej aż do* 1. Inni wyraźnie zapisywali, że sumują do nieskończoności $n-1+n-2+n-3+\ldots(n-\infty)$.

Podejmowane próby zapisu uogólnień nie zakończyły się sukcesem, w co najmniej jednym zadaniu u 54% uczniów, a w trzech lub w czterech zadaniach u 16% uczniów. Lista błędnych uogólnień jest długa, obejmuje 46 różnych zapisów. Poniżej zacytowane zostały **przykłady błędów**, (oddzielanych średnikiem) w niektórych podano ich hipotetyczne przyczyny, gdy dało się je zinterpretować z zapisów rozwiązania:

- *n;* $n-1$; – złe rozumienie treści zadania, liczone były boki wielokąta albo liczba osób lub abonentów, zapisy takie wystąpiły u (16%) uczniów, którzy za wszystkie rozwiązania uzyskali bardzo małą liczbą punktów;
- $n(n-1); n(n-3); (n-1)(n-1); n(n-2)$ – (błędy obserwacji) nie dostrzeżono, że dwukrotnie liczone są odcinki albo przekątne n-kąta (nie podzielono iloczynu przez 2); komentarze dotyczyły zapisu $n-1$ – *sam do siebie nie dzwoni, do tego samego punktu nie prowadzimy odcinka,*

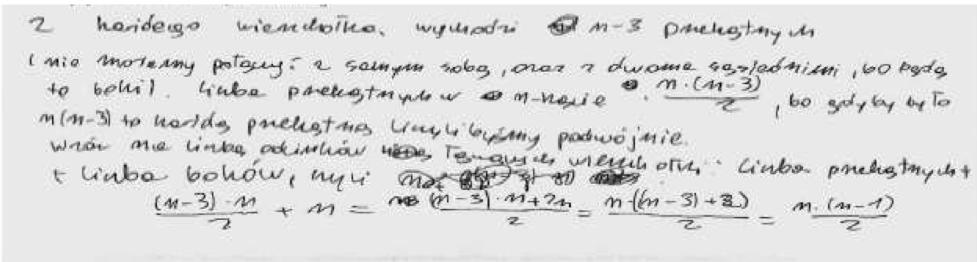
z każdego wierzchołka wychodzi $n-1$ *odcinków*, ($n-3$ *przekątnych*); mogą to być też błędy pamięci związane z błędnym odtworzeniem wzoru na liczbę przekątnych;

- $n-1+n-2+n-3$; $1fig+(1fig+2)+(2fig+3)+(3fig+4)+\dots$ – błędy w zapisie zaobserwowanej rekurencyjnej zależności dla kilku początkowych obiektów;
- $1+2+3+n-1$ – błąd zapisu (brak $\dots+$);
- $2n; 2n-1; 2n-2; 2n+2$; $2N$ krawędzi; $2N \cdot W =$ ilość odcinków, W – ilość wierzchołków; n – wierzchołków; nieskończenie wiele (prawdopodobnie zła matematyzacja, bez rozmowy z uczniem trudno ustalić sposób jego rozumowania).

Przykłady uzasadnień podawanych przez uczniów.

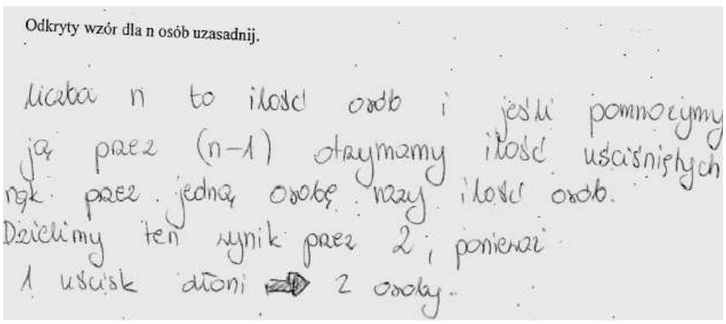
Uzasadnienie gimnazjalisty do uogólnienia w zadaniu 1, w którym wyraźnie skorzystał ze wzoru na liczbę przekątnych w wielokącie.

Przykład 8


Z każdego wierzchołka wychodzi n-3 przekątnych
(nie możemy połączyć z samym sobą, oraz z dwoma sąsiednimi, bo będą to boki). Liczba przekątnych w n-kącie $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$, bo gdyby było to
n(n-3) to każdą przekątną liczylibyśmy podwójnie.
Wzór na liczbę odcinków ~~...~~ to suma otrz.: liczba przekątnych +
+ liczba boków, czyli
$\frac{(n-3)\cdot n}{2} + n = \frac{(n-3)\cdot n+2n}{2} = \frac{n\cdot((n-3)+2)}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

Uzasadnienie gimnazjalisty w zadaniu drugim, wykorzystujące zaobserwowane zależności w konkretnej sytuacji.

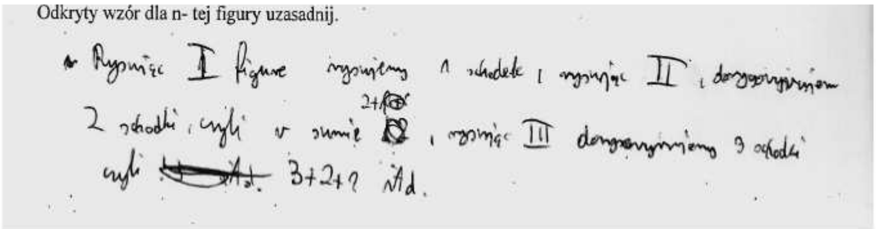
Przykład 9


Odkryty wzór dla n osób uzasadnij.

Liczba n to ilość osób i jeśli pomnożymy ją przez (n-1) otrzymamy ilość uściśniętych rąk przez jedną osobę razy ilość osób. Dzielimy ten wynik przez 2, ponieważ 1 uścisk dłoni ⇒ 2 osoby.

Uzasadnienie gimnazjalistów w zadaniu czwartym.

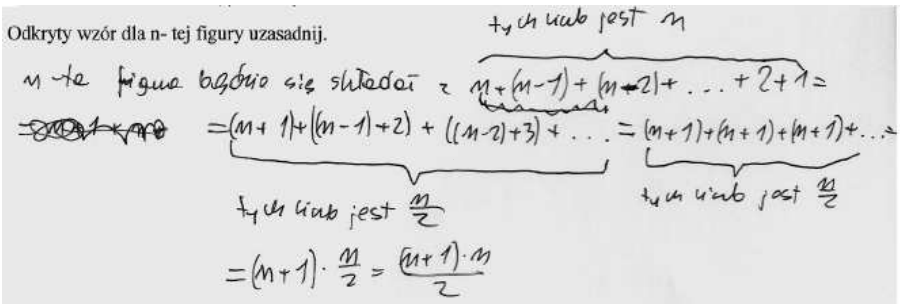
Przykład 10



Odkryty wzór dla n- tej figury uzasadnij.

Rysując I figurę rysujemy 1 schodek, rysując II, dorysowujemy 2 schodki, czyli w sumie $2+1$, rysując III dorysowujemy 3 schodki czyli ~~itd.~~ $3+2+1$ itd.

Przykład 11



Odkryty wzór dla n- tej figury uzasadnij.

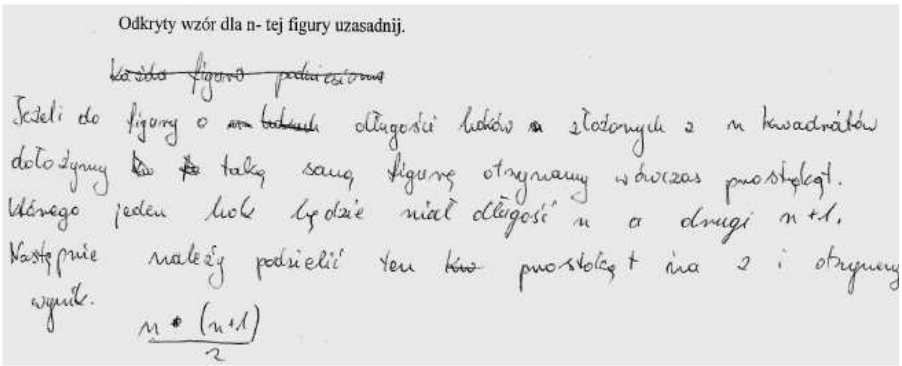
n-ta figura będzie się składać z $\overbrace{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1}^{\text{tych liczb jest } n} =$

$=\underbrace{(n+1)+((n-1)+2)+((n-2)+3)+\ldots}_{\text{tych liczb jest } \frac{n}{2}} = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots}_{\text{tych liczb jest } \frac{n}{2}} =$

$=(n+1)\cdot\frac{n}{2}=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$

Uzasadnienie dla uogólnienia zadania „schodki" z wykorzystaniem pola figur.

Przykład 12



Odkryty wzór dla n- tej figury uzasadnij.

~~Każdą figurę podzielimy~~

Jeżeli do figury o długości boków złożonych z n kwadratów dołożymy taką samą figurę otrzymamy wówczas prostokąt, którego jeden bok będzie miał długość n a drugi $n+1$. Następnie należy podzielić ten prostokąt na 2 i otrzymamy wynik.

$\frac{n * (n+1)}{2}$

Pisząc uzasadnienia dla swojego „wzoru" niektórzy uczniowie ujawnili jak rozumieli, co to znaczy uzasadnić:

- sprawdzali zapisany przez siebie wzór przez podstawienie dla konkretnego $n = 3$ lub $n = 5$ (10% uczniów);

- przepisywali wzór jeszcze raz w miejscu na uzasadnienie (6% uczniów), a jedna osoba nawet napisała, *bo taki jest wzór*;
- słownie zapisywali wzór (4% uczniów), na przykład dla wyrażenia $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$, jako uzasadnienie pisali: *ilość odcinków łączących wierzchołki jest równa iloczynowi* $\frac{1}{2}$ *ilości wierzchołków i ilości wierzchołków zmniejszonej o* 1;
- przekształcali algebraicznie wzór na wzór równoważny (3% uczniów);
- jedna osoba narysowała w uzasadnieniu schemat blokowy, niestety niepoprawny.

W jednej pracy, w której wszystkie obliczenia i uogólnienia podane zostały poprawnie, pojawiło się w miejscu przeznaczonym na uzasadnienie rozpaczliwe pytanie: „Jak?!" Jeden uczeń nazwał swoją metodę uzasadniania „próby do skutku", polegała ona na wypisywaniu prostych wzorów typu: $2N$, $N(N-1), (3N-1):2, N^2-N, \frac{1}{2}N^2$ i sprawdzaniu, pod który z nich podpada liczba policzonych odcinków dla trójkąta, pięciokąta i ośmiokąta. Dziewiąta próba była udana $N(N-1):2$.

Odpowiedzi na pytania ankiety udzieliło tylko 47 uczniów, w tym na obydwa pytania tylko 36 uczniów. Więcej uczniów dostrzegało podobieństwa między zadaniami niż umiało poprawnie zapisać zależności lub je uzasadnić. Uczniowie, którzy dobrze rozwiązali zadania wskazali podobieństwa między zadaniami i dokładniej je określali. Nie wszyscy jednak odpowiadali na pytania, trudno powiedzieć, z jakiego powodu (pytania były dla nich niezrozumiałe, nieciekawe, czy zabrakło im czasu). Zadania, pomiędzy którymi wskazali uczniowie podobieństwa zestawione zostały w tabeli.

Podobne zadania	Liczba uczniów	Podała poprawne zależności
1 z 2 z 3 z 4	22	6
1 z 2 z 3	17	9
1 z 2 i 1 z 3, 1 z 2 i 2 z 3	3	0
1 z 2	1	0

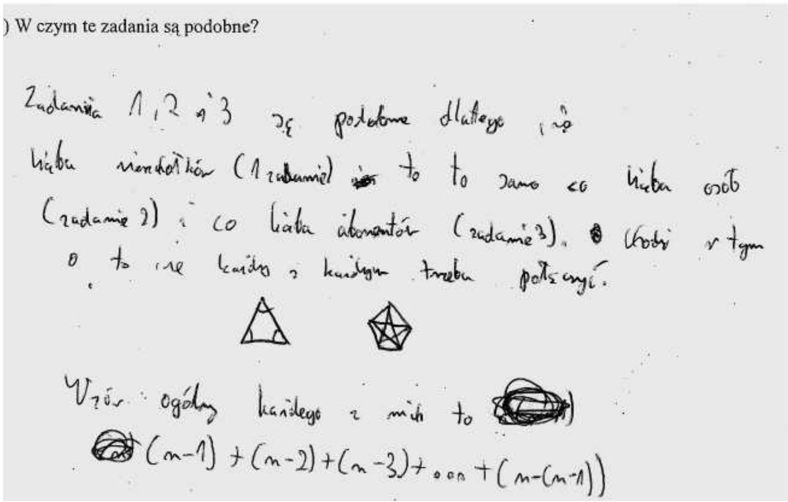
Ta część badania nie dostarczyła nam wielu informacji. Mimo tego ranking podanych odpowiedzi potwierdza, że w świadomości uczniów „wzór" (wynik) jest ważniejszy od sposobu rozwiązania. Uczniowie wskazywali (w nawiasie podana liczba uczniów), że zadania są podobne, bo mają:

- Ten sam wzór – (11).
- Ten sam sposób rozwiązania – (7).

- Taką samą treść, tylko trochę zmienioną – (2).
- Cel ich jest taki sam, trzeba znaleźć wzór, według którego należy liczyć – (3).
- Ten sam sposób myślenia i liczenia – (2).

Poniżej odpowiedź ucznia (przykład 13), który rozwiązał wszystkie zadania. Dostrzegł analogie między zadaniami, precyzyjnie je opisał i wskazał wspólny model w postaci wyrażenia algebraicznego. Warto zwrócić uwagę na to jak zorganizowany sposób liczenia i utworzony schemat (w n–kącie z dowolnego wierzchołka poprowadzę $n-1$ odcinków, z następnego $n-2\ldots$) przedstawiony na rysunkach wpłynął na zapisane uogólnienie. Nie wskazał on jednak podobieństwa między zadaniami 1, 2, 3 i zadaniem 4.

Przykład 13


) W czym te zadania są podobne?

Zadania 1, 2 i 3 są podobne dlatego, iż liczba wierzchołków (1 zadanie) to to samo co liczba osób (zadanie 2) i co liczba abonentów (zadanie 3). Chodzi w tym o to, że każdy z każdym trzeba połączyć.

Wzór ogólny każdego z nich to

$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+(n-(n-1))$

3. Wnioski. Próba podsumowania

Przeprowadzona analiza rozwiązań zadań miała pomóc w udzieleniu odpowiedzi na pytanie:

Czy 16–17 *letni uczniowie potrafią dostrzec wspólny model w różnych sytuacjach, opisać go w postaci wyrażenia algebraicznego i uzasadnić zależność, jaką uzyskali*?

- Na podstawie opisanych badań sondażowych można uznać, że **nie więcej niż 25%uczniów, potrafi dostrzec wspólny model w podobnych sytuacjach**. Są to ci uczniowie, którzy rozwiązali, co najmniej trzy z czterech zadań, zapisali uogólnienia i wskazali podobieństwa między tymi zadaniami. Jeśli jednak oczekiwalibyśmy, że uczniowie zapisane przez siebie uogólnienie w postaci wyrażenia algebraicznego (wzoru) **potrafią uzasadnić (wyprowadzić czy udowodnić), to liczba tych, którzy to potrafią, nie przekraczałaby 10 % badanych**.[12]

- Jeśli spojrzeć na badane umiejętności w całej grupie uczniów, to trudności dotyczyły najczęściej uogólniania i użycia liter do opisania zmiennych i zależności między nimi. Można wyróżnić cztery grupy wśród tych uczniów. Takich, którzy:

nie podjęli prób uogólniania, poprzestali na konkretach (14% uczniów)	podjęli próby, ale nie potrafili uogólnić, popełniali błędy (41 % uczniów)	potrafili uogólnić w jednym lub dwóch zadaniach (21% uczniów)	potrafili uogólniać w trzech lub czterech zadaniach (24 % uczniów)

  Najliczniejsza grupa uczniów potrzebuje pomocy na etapie schematyzacji i wstępnej matematyzacji sytuacji: począwszy od wnikliwego obserwowania sytuacji i zrozumienia postawionego pytania, ustalenia wielkości danych i wielkości zmieniających się, ustalenia dla nich oznaczeń i zapisania zależności między wielkościami w języku matematycznym, najpierw z użyciem liczb i działań, a później liter, (z zapisem tego, co oznaczają i jakie muszą spełniać ograniczenia), wyrażeń algebraicznych, równań lub funkcji.

- W tego typu badaniach zawsze nasuwają się wątpliwości, co do wyboru grupy uczniów, wyboru narzędzi badań i formułowanych wniosków, na ile można je uogólniać.

Dla wzmocnienia wiarygodności tych wniosków zacytuję:

- wnioski z międzynarodowych badań PISA/OECD: *Polska młodzież, niezależnie od działu matematyki gorzej radzi sobie z zadaniami wymagającymi abstrakcyjnego myślenia: analizy lub uogólnienia (...) z samodzielnym opanowaniem nieznanego wcześniej modelu lub kontekstu, z zaprojektowaniem strategii postępowania – odpowiedniego ciągu działań prowadzącego do rozwiązania, składającego się z dobrze znanych operacji*[13];

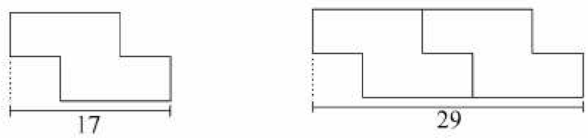
[12]Taka interpretacja opanowania umiejętności jest zgodna z przyjmowanymi ustaleniami, że badana umiejętność jest w strefie możliwości ucznia (Siwek, 1985) lub że uczniowie opanowali te umiejętność w stopniu co najmniej zadowalającym (Niemierko, 1990; CKE, 2005), gdy za zadania sprawdzające daną umiejętność uzyskali powyżej 70% możliwych do uzyskania punktów. Wynik taki jest możliwy, gdy zadania dla uczniów są łatwe lub bardzo łatwe. Te zadania, które uczniowie rozwiązywali były dla nich trudne lub umiarkowanie trudne.

[13]Sułowska A., Marciniak Z., *Matematyka w Programie PISA* w: Wyniki badania 2003 w Polsce, s. 12, Wyniki badania 2006 w Polsce. s. 40.

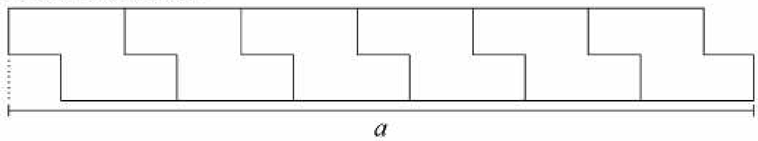
- wyniki z egzaminu gimnazjalnego z 2008 roku,[14] w którym badano umiejętność uogólniania zadaniem:

ZADANIE 32. (0-2)

Dla patrzącego z góry płytka chodnika ma kształt ośmiokąta, w którym kolejne boki są prostopadłe. Na rysunkach przedstawiono jego kształt, sposób układania płytek oraz niektóre wymiary w centymetrach.



Ułożono sześć płytek.



Oblicz długość odcinka *a*.
Napisz wyrażenie algebraiczne, odpowiadające długości analogicznego odcinka dla pasa złożonego z *n* płytek.

Odpowiedź: Długość odcinka *a* ....

Wyrażenie algebraiczne ....

Długość chodnika ułożonego z 6 płytek obliczyło 27% uczniów a 13% uczniów poprawnie zapisało wyrażenie algebraiczne w postaci: $17 + 12(n-1)$ albo $29 + (n-2) \cdot 12$, albo $5 + 12n$.

- dwa wnioski z przeprowadzonych badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku 10 – 14 lat w grupie 311 uczniów polskich i prawie równolicznej grupie uczniów czeskich (Zaręba, 2003)[15]: *wyniki sugerują, że* ***symboliczny i poprawny zapis logicznej zależności znajduje się powyżej możliwości przeciętnego ucznia badanej grupy uczniów polskich*** (...), *natomiast stosowanie zmiennej do wyrażania zależności liczbowych* (*bez wnikania w poprawność zapisu*) *znajduje się w strefie najbliższych możliwości uczniów tej grupy.*" W grupie uczniów czeskich również symboliczny

[14] CKE, 2008, *Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w* 2008 *roku*, Warszawa.

[15] Zaręba L. 2003, Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku 10 – 14 lat, Dydaktyka Matematyki. t. 25 s. 170.

i poprawny zapis logicznej zależności jest powyżej możliwości uczniów, ale w rozwiązywaniu tych samych zadań uzyskiwali oni o 10 punktów procentowych lepsze wyniki, są inaczej uczeni (mniej formalnie i inne mają doświadczenia związane z symboliką literową).

Nasuwają się **zasadnicze pytania**:

1. *Czy uogólnianie jest tak trudną umiejętnością, że wykracza poza możliwości normalnego, zdrowego,* 16 – 17 *letniego ucznia*?
2. *Czy my nie potrafimy tego nauczyć*?

W doborze przykładów matematycznych dla kształtowania umiejętności stosowania symboli literowych i wyrażeń algebraicznych w polskim nauczaniu wciąż za mało wykorzystywany jest najprostszy model matematyczny – model liczb naturalnych. Nie ma tradycji uczenia uogólniania przez indukcyjne rozumowania, przez uzmiennianie stałej. (Formalne nauczanie nakazuje użyć od razu indukcji matematycznej i ciągów.) Liczby trójkątne i liczby kwadratowe nie należą do kanonu zadań rozwiązywanych w szkole a są ukierunkowane na dostrzeganie regularności, dostrzeganie wspólnego schematu i modelu. Dobra praktyka nauczycielska podpowiada, że do kształcenia tego typu aktywności warto wykorzystać zadania wieloetapowe (podobne do tych, jakie zostały użyte w badaniach). W tego typu zadaniach **każdy uczeń jest w stanie „coś" zrobić samodzielnie**, poczuć satysfakcję i kontynuować dalej. Jak daleko dojdzie w rozwiązywaniu kolejnych zadań, zależy od niego, jego umiejętności, wytrwałości a także pomocy ze strony nauczyciela. Ta pomoc jest szczególnie potrzebna uczniom, którzy daną umiejętność mają w strefie najbliższych możliwości. Jest „coś pociągającego" dla uczniów w tych zadaniach. W sposób naturalny pojawia się potrzeba mówienia o dostrzeganych, powtarzających się, ale i zmieniających się podobieństwach („regułach", „rytmach"), pojawia się potrzeba rysowania różnych schematów, porządkowania, zapisywania z użyciem liczb, liter, wyrażeń algebraicznych i wzorów. Pojawia się potrzeba nadania znaczenia słowom „dla dowolnej", „dla każdej" (liczby, figury). W sposób naturalny pojawia się potrzeba uzasadniania, „dlaczego tak?" i dostępne są środki weryfikacji: podstawianie i sprawdzanie, odwołanie się do konkretu, do realnej rzeczywistości.

Literatura

[1] CKE, 2008.: *Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w* 2008 *roku.* Warszawa.

[2] Damerow, P.: 1986, *Matematyka dla wszystkich – poglądy, zagadnienia, wnioski*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 6 , s. 7 – 24.

[3] *Encyklopedia Szkolna Matematyka*, 1997, WSiP, Warszawa.

[4] Freudenthal, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company/Dordrecht-Holland.

[5] Krygowska, A. Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, WSiP, Warszawa.

[6] Krygowska, A. Z.: 1986, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 6, s. 25 – 41.

[7] Krygowska, A.Z.: 1981, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat* 1960 – 1980, WN WSP Kraków.

[8] Niemierko, B.: 1990, *Pomiar wyników kształcenia*, WSiP, Warszawa.

[9] Ochałek, M.: 2009, *Aktywności ucznia ujawnione przez uczniów trzeciej klasy gimnazjum w rozwiązaniach serii zadań „Remont pokoju”*, Praca magisterska pod kierunkiem M. Legutko, UP Kraków.

[10] *Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów OECD/PISA*, Wyniki badania 2006 w Polsce, MENiS.

[11] Pytlak, M. 2006.: *Uczniowie szkoły podstawowej odkrywają regularności*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria V, Dydaktyka Matematyki. t. 29, s. 115 – 149.

[12] *Rozporządzenie MEN z dnia* 23 *grudnia* 2008 w *sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół*, Dziennik Ustaw z 2009 r. Nr 4 poz. 17.

[13] Semadeni, Z.: 2003, *Spłaszczanie się hierarchii pojęć, horyzontalne i wertykalne składowe matematyzacji i wieloznaczność słowa „model"*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 25 s. 111 – 150.

[14] Siwek, H.: 1985, *Naśladowanie wzorca i dostrzeganie prawidłowości w prostych sytuacjach matematycznych i paramatematycznych przez dzieci upośledzone w stopniu lekkim*, WN WSP Kraków.

[15] Smolec, A.: 2009, *Dostrzeganie matematycznego modelu w zadaniach matematycznych i w zadaniach z realnym kontekstem przez uczniów* (*trzeciej klasy gimnazjum i pierwszej klasy liceum*), Praca magisterska pod kierunkiem M. Legutko, UP Kraków.

[16] Sułowska, A., Marciniak Z.: *Matematyka w Programie PISA* w: Wyniki badania 2003 w Polsce, s. 6 – 12.

[17] Treffers, A.: 1987: *Three Dimensions.* Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

[18] Treliński, G.: 1982, *Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki*, WN WSP Kraków.

[19] Treliński, G.: 2008, *Od rzeczywistości do matematyki – trudności modelowania.* Referat wygłoszony na 21. konferencji SNM, Kielce.

[20] Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

[21] Turnau, S.: 1993, *Co to jest realistyczne nauczanie matematyki*, Nauczyciele i Matematyka nr 5, s. 2 – 5.

[22] Wheeler, D.: 1986, *Matematyzacja jako podstawowa orientacja w nauczaniu „Matematyki dla wszystkich"*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 6, s. 103 – 112.

[23] Zaręba, L.: 2003, *Z badań nad procesem uogólniania i stosowaniem w nim symbolu literowego przez uczniów w wieku* 10 – 14 *lat*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria V, Dydaktyka Matematyki, t. 25, s. 151 – 182.

Autorka pracuje w Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie