Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Edyta Jagoda, Ewa Swoboda (Rzeszów)

Środowisko edukacyjne „Kafelki”

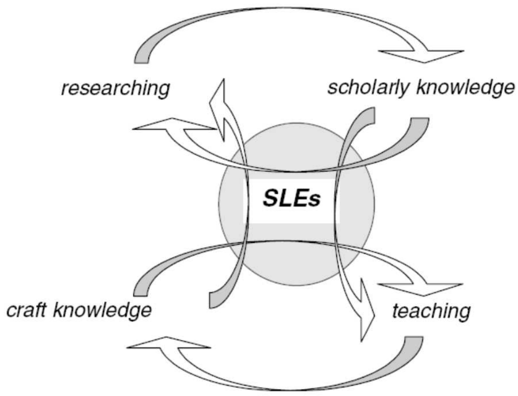
Artykuł powstał w ramach projektu NaDiMa
142453-PL-2008-Comenius-CMP Motivation
via Natural Differentiation in Mathematics.
Partnerami w tym projekcie był Uniwersytet Rzeszowski
oraz Zespół Szkół Społecznych nr 1 w Rzeszowie.
Autorki reprezentują te instytucje i czynnie
uczestniczyły w realizacji projektu.

Wstęp

W konstruktywistycznym podejściu do uczenia się matematyki nauczyciel nie jest po prostu przekaźnikiem wiedzy. Spada za to na niego zadanie stworzenia uczniom takich warunków, by mogli oni sami konstruować w umyśle niezbędne schematy myślowe. Dzieje się to z jednej strony poprzez przyjęcie odpowiedniego stylu nauczania, a z drugiej – poprzez zorganizowanie zajęć dzieci wokół odpowiednio sformułowanych problemów. W literaturze dydaktycznej całokształt tych zabiegów często określa się jako organizowanie odpowiedniego środowiska edukacyjnego (ang. – *learning environment*). Autorzy pojawiających się propozycji dydaktycznych oraz teoretycznych opracowań zwracają uwagę na różne aspekty procesu uczenia się – motywację, kontekst społeczny, możliwość refleksji, zaangażowanie w rozwiązywanie zadań poprzez autentyczność problemów przedstawianych uczącym się, możliwość stymulowania rozwoju intelektualnego. Wtedy proces edukacyjny – metody pracy, narzędzia, itd. – jest tak organizowany i w takim środowisku, by te cele zrealizować (Jonassen, 1999). Zdaniem innych, środowiska edukacyjne winny być ukierunkowane na budowanie matematycznych schematów (Hejný, 2008; Hejný, Jirotková, 2009). W tym ujęciu środowisko bazuje na codziennych doświadczeniach dziecięcych, przez co umożliwia nadanie semantycznej interpretacji trudnym matematycznie i dydaktycznie zagadnieniom. Wśród dydaktyków niemieckich szeroko jest propagowana idea „treściwego środowiska edukacyjnego” (Substantial Learning Environment, SLE – Wittmann, 1995, 2001; Scherer, 2007). Wittmann opisuje SLE jako jednostkę nauczania/uczenia się charakteryzującą się następującymi własnościami.

1. Reprezentuje ona podstawowe cele, treści i zasady dotyczące nauczania matematyki na określonym poziomie edukacyjnym.
2. Dotyczy istotnych matematycznych zagadnień, procesów i procedur wykraczających poza ten poziom i jest bogatym źródłem aktywności matematycznych.
3. Jest elastyczna i może być z łatwością adoptowana do specyficznych warunków klasy.
4. Integruje matematyczne, pedagogiczne i psychologiczne aspekty nauczania matematyki, a przez to tworzy bogate pole empirycznych badań dla dydaktyki matematyki (Wittmann, 1995, s. 365 – 366).

Podkreślając wagę SLE dla dydaktyki matematyki, Wittmann (2001) stwierdza: *Pojęcie SLE ma dużą moc. Może być użyte dla pomyślnego rozwiązania jednego z najważniejszych zagadnień dydaktyki matematyki, które staje się coraz bardziej naglące i które ma istotne znaczenie dla dydaktyki matematyki jako dyscypliny naukowej: związku teorii z praktyką. (. . .) Zaprojektowanie SLE – bogatego środowiska edukacyjnego wokół długoterminowych linii dydaktycznych – powinno być umiejscowione w centrum dydaktyki matematyki. Badania, rozwój oraz przygotowanie nauczyciela powinny być w świadomy sposób z nimi związane, i to w sposób bardzo systematyczny.*



Rys 1. Projekt Substantial Learning Environment (Wittmann, 2001, s. 5)

Dodatkowo, stwierdza on:
Nieprzypadkowo projekty rozwojowe bazujące na SLE były podstawą udanych zmian w sposobie nauczania matematyki oraz zmian w postawach nauczycieli: w tych projektach podstawowe warunki systemowe były brane pod uwagę (Wittmann, 2001, s. 5).

W roku szkolnym 2008/09 w jednej ze szkół Rzeszowa rozpoczęliśmy realizację Międzynarodowego Projektu NaDiMa: „Motywacja poprzez naturalne zróżnicowanie w matematyce”. Zespoły z Niemiec, Holandii, Czech i polski podjęły się wypracowania cyklu jednostek lekcyjnych dotyczących wybranych treści matematycznych i spełniających założenia środowisk edukacyjnych SLE. W Polsce wybraliśmy zagadnienia geometryczne. Wyszliśmy z założenia, że geometryczne regularności dają wiele możliwości do tworzenia sytuacji dydaktycznych powiązanych z matematyką (Swoboda, 2006, 2009). Budowanie przez dzieci regularności stwarza szansę na wydobycie wielu intuicji, będących podstawą niełatwych pojęć geometrycznych. Podjęcie tematyki geometrycznej wychodzi naprzeciw zmianom w edukacji matematycznej, sugerowanych układem treści w podstawach programowych zatwierdzonych w 2008 roku. Dodatkowo wzbogacenie szkolnej matematyki o treści geometryczne jest zgodne z wieloma badaniami prowadzonymi w Polsce (Swoboda, 2006, 2008, 2009; Jagoda, 2004, 2008; Rożek, 2009) i w świecie (Vopěnka, 1989; Callingham, 2004; Clements, Swaminathan, Hannibal, Sarama, 1999; Marchini, Vighi, 2009). Zgodnie z zawartymi tam sugestiami, dziecko powinno poznawać geometrię nie tylko poprzez podstawowe kształty (koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt) i mierzenie, ale i poznawanie relacji między tymi kształtami (badanie podobieństwa, symetrii). Badanie kształtów i zjawisk geometrycznych może odbywać się dynamicznie – nie tylko poprzez dostrzeganie, ale i tworzenie regularności przez dzieci. Cytowane badania pokazują, że tworząc układanki lub budując szlaczki, dzieci są w stanie nie tylko odgadnąć „co będzie dalej”, ale dokonać transformacji jednego szlaczka w inny, a nawet reprezentować tę samą regularność na różne sposoby (Mulligan, Michelmore, 2009; Ginsburg, 2002). Rozmowy z dziećmi o zauważonych związkach i o różnych zaproponowanych rozwiązaniach prowokują je do zwrócenia uwagi na specyficzne własności związków i do wyrażania ich w coraz bardziej precyzyjny sposób. Tak więc zajęcia z geometrii, odbywające się w środowisku regularności przygotowują do tych zachowań i rozumowań, które są podstawą umysłowej aktywności na lekcjach matematyki.

Poziom, do którego odnosimy się konstruując nasze środowisko „Kafelki”, związany jest raczej z tworzeniem przez dziecko jego „wyobrażenia pojęcia” związanego z przekształceniami geometrycznymi, niż „definicji pojęcia”. Dodatkowo zastanawialiśmy się nad kształtowaniem takich intuicji, które pomogą dziecku w przekroczeniu poziomu wizualnego rozumienia przekształceń i ukierunkują je na dynamiczne rozumowania w obrębie geometrii. W tym przypadku byłoby to przejście od statycznej, wizualnej reprezentacji relacji między figurami w kierunku rozumienia dynamicznych związków między obiektami i ruchem nakładającym jeden obiekt na drugi.

Realizacja projektu

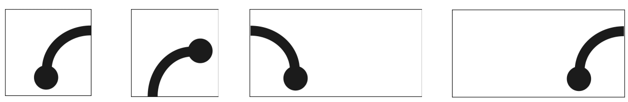
Praca nad stworzeniem środowiska „Kafelki” odbywała się na kilku poziomach edukacyjnych, w ramach systematycznej nauki szkolnej. Nauczyciele uczestniczący w projekcie zdecydowali się realizować programowe treści geometryczne w nieco inny sposób, niż to robili do tej pory. Początkowo projekt obejmował dzieci w wieku od 5 do 12 lat, a mianowicie 6–latki w przedszkolu oraz klasy I, III i IV – VI. Niektóre zajęcia przeprowadzono także z uczniami gimnazjum (13 lat).

Tworzenie propozycji SLE przebiegało etapami. Każda faza projektu była efektem działań na etapie poprzednim oraz stanowiła podstawę dla powstania fazy następnej. W zamyśle miało to dawać szansę na tworzenie różnych scenariuszy zajęć dostosowanych do różnego poziomu wiekowego oraz pozwalało różnorodnie kontynuować scenariusze, w zależności od obserwowanych potrzeb dzieci i proponowanych przez nie rozwiązań. Równocześnie wspólna analiza obserwacji zebranych na różnych poziomach edukacyjnych dawała lepszą podstawę do interpretowania zaobserwowanych zjawisk.

1. Faza wstępna

- *Zapoznanie nauczycieli z ideą projektu, wybór zagadnień realizowanych w ramach projektu*

Nauczyciele musieli między innymi zapoznać się z ideą nauczania geometrii poprzez regularności, poznać koncepcję SLE oraz wypracować narzędzie pozwalające na zrealizowanie tej koncepcji w klasie i takie, by dało się łatwo modyfikować. Zgodnie z tymi założeniami teoretycznymi opracowane zostało narzędzie badawcze. Były to tekturowe „kafelki” z jednym podstawowym motywem w dwóch wersjach (druga wersja była lustrzanym odbiciem pierwszej). Dodatkowo motyw ten wydrukowany był na kartonikach o dwóch kształtach: kwadratowym i prostokątnym. Podstawowy zestaw składał się więc z czterech rodzajów kafelek (rys. 2).



Rys. 2. Rodzaje kafelek przygotowanych dla dzieci

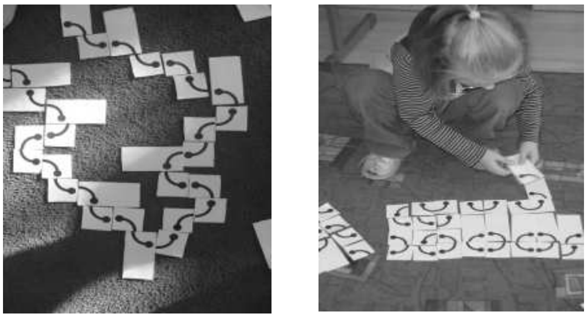
Jeżeli wzór na kafelku nie jest osiowo-symetryczny, dla stworzenia z niego symetrycznej kompozycji potrzebne jest odbicie lustrzane. Można je uzyskać poprzez przyłożenie lusterka do jednego kafelka lub przyłożenie kafelka odwróconego na drugą stroną. Kafelki używane przez dzieci były jednak zadrukowane tylko z jednej strony, trzeba więc było mieć kafelki dwóch różnych rodzajów:

prawy i lewy. Jeszcze inne możliwości daje użycie kafelka prostokątnego. Zastosowanie tego samego wzoru na kafelku kwadratowym i na prostokątnym powoduje, że jedne motywy są dalej od siebie, a inne bliżej. Fakty te miały umożliwić odkrywanie różnych związków między figurami w powstałej układance. Sam wzór wydrukowany na kafelku umożliwiał również różny poziom dokładności: w jednym przypadku można było pominąć istnienie kropki i skupić się na istnieniu łuku, w inny przypadku kropka na końcu łuku mogła być elementem istotnym.

- *Zapoznanie uczniów z kafelkami*

Dzieci dostały kafelki z poleceniem, by próbowały coś ciekawego z nich ułożyć. Był to czas ich spontanicznej aktywności, ich swobodnej twórczości, zabawy. W naszym projekcie w klasach IV – VI uczniowie mieli sprawdzić, jakie możliwości aranżacji stwarzają kafelki. W kasach młodszych nauczyciel dla wprowadzenia uczniów w tematykę opowiedział uczniom bajeczkę o Cesarzu Wisience, który takimi kafelkami ozdabiał swój pałac, a dzieci były proszone o pomoc w ozdabianiu. Dla nauczycieli obserwujących ten etap była to sposobność zweryfikowania wyników badań dydaktycznych, w szczególności stwierdzenia, że kafelki w naturalny sposób prowokują do poszukiwania regularności. Testowano również przydatność kafelków zarówno pod kątem pojęć i procedur matematycznych, możliwych do osiągnięcia na zajęciach, jak i ich atrakcyjności na różnych poziomach edukacyjnych.

Zaobserwowaliśmy różnorodne zachowania uczniów już bezpośrednio po wysypaniu z kopert przygotowanych kafelków. Część z nich grupowała kafelki, zauważała różnice pomiędzy kwadratami czy prostokątami. Inni od razu rozpoczynali układanie, sprawdzając, w jaki sposób można dostawiać kafelek do kafelka (fot. 1).



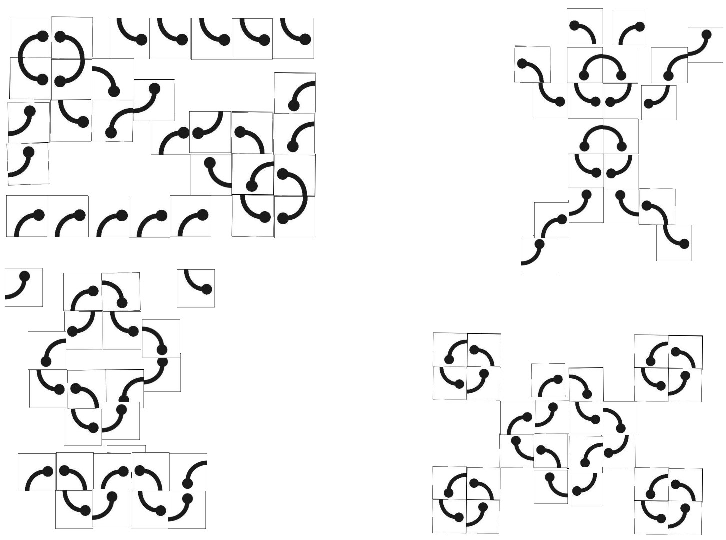
Fot. 1

Wzorek na kafelkach prowokował dzieci do kontynuowania linii. Bardzo często powstawały kompozycje stworzone z linii przedłużanej w dowolnych kierunkach. Dzieci starsze bardzo szybko zaczynały tworzyć układanki regularne, które powstawały zgodnie z narzuconymi samodzielnie regułami, z zachowaniem pewnych związków między fragmentami tworzonych ornamentów.

W obserwowanych przez nas klasach uwidoczniły się znaczne różnice między uczniami. Ta część dzieci, która nie była w stanie w ciągu całej wstępnej fazy projektu zbudować układanki odpowiadającej pewnym regułom, stworzyć regularnego wzoru czy szlaczka, stanowiła mniejszość. Pozostali od samego początku narzucali sobie wyraźną regułę i tworzyli bogatą geometrycznie układankę. Obserwowaliśmy, w jakim stopniu jej realizacja będzie reprezentować te układy, które w matematyce odpowiadają symetrii osiowej, środkowej lub przesunięciu.

Niektórzy uczniowie całą układankę, ze wszystkimi detalami podporządkowywali idei symetrii (zwracając uwagę na miejsce „kropki" oraz długość kartonika). Inni traktowali układankę globalnie, pomijając szczegóły. Każdy realizował jakąś ideę symetrii, ale na różnych dostępnych sobie poziomach. Działania ich były autonomiczne, nie narzucone przez nauczyciela. Dziecko samo z siebie realizowało swoją regułę, w dostępnym sobie zakresie.

W pracach dzieci klas IV – VI (rys. 3) najczęściej obecna była symetria lustrzana.



Rys. 3. Przykłady prac uczniów 10 – 12 letnich

Powstawały figury osiowo-symetryczne, w których dziecko często zwracało uwagę nie tylko na zachowanie symetrii łuków, ale i symetryczny układ kropek na końcach tych łuków. Były też układanki składające się z symetrycznie ułożonych dwóch figur.

Opisywani uczniowie klas IV – VI nie uczyli się w klasach młodszych o symetriach, nie mieli zajęć organizowanych z myślą o wyczulaniu na geometryczne regularności. Uczniowie, którzy potrafili ułożyć bardzo regularne prace wykazali, że takie aranżacje są im bliskie kulturowo. Kafelki wyzwoliły w nich chęć eksperymentowania, poszukiwania geometrycznych zjawisk. Tego typu działanie jest zgodne z teoretycznymi podstawami kształtowania pojęć geometrycznych opisanymi w teoriach Hejný'ego i Vopěnki.

2. Faza układanek jednowymiarowych (szlaczków)

W drugiej fazie projektu postanowiliśmy skupić uwagę uczniów na wzorze jednowymiarowym, czyli szlaczku (fot. 2).

Fot. 2

Ograniczenie takie było związane z potrzebą realizacji celów dydaktycznych, jakimi było odróżnienie odbicia lustrzanego (zmieniającego uporządkowanie płaszczyzny) od przesunięcia i obrotu (które zachowują uporządkowanie płaszczyzny). Chcieliśmy wyeksponować związki i różnice pomiędzy dwoma rodzajami kafelków kwadratowych. Zajęcia przeprowadzone w klasach polegały na układaniu szlaczków oraz psuciu ich. „Psucie szlaczka” było zadaniem odwrotnym do „układania” szlaczka i jako takie dawało inne możliwości poznania własności odbicia lustrzanego i skonfrontowania ich z własnościami obrotu i przesunięcia.

Uczniom zostały zaproponowane zabawy w **układanie i psucie szlaczka oraz w kodowanie i odkodowanie szlaczka**. Te aktywności odbywały się na oddzielnych lekcjach.

- *Układanie i psucie szlaczka*

Na tablicy jeden uczeń układał wzorek. Wybieraliśmy osobę, która popsuje wzorek oraz osobę, która będzie go naprawiać. Ta druga osoba wychodziła z klasy, aby nie widzieć co zostało zmienione, po czym wracała naprawić szlaczek. Dzieci wiedziały, że psując szlaczek muszą zachować jednowymiarowość układanki. Dodatkowo szlaczek musiał być ciągłą sekwencją znaków, bez przerw między kafelkami (fot. 3).

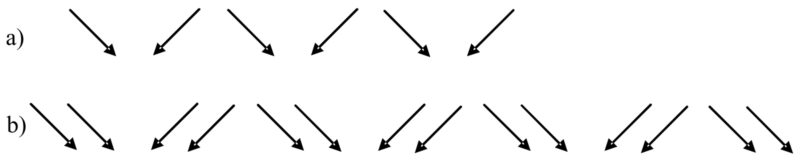
Fot. 3

Zajęcia były dla uczniów bardzo ekscytujące, mimo że okazały się niełatwe. Dziecko musiało zapamiętać strukturę wzoru wizualnie (jako całość) lub sekwencyjnie, pamiętając kolejność i sposób ułożenia kafelków. Obserwacja pracy dzieci podczas sprawdzania wzoru pokazała, że działają one właśnie w ten sposób. Sprawdzając regularność, dzieci na ogół analizowały kafelki ułożone na tablicy, porównując zachodzenie określonych związków między kolejnymi kafelkami. Widać było, że ich działanie nie jest biernym kopiowaniem wzoru, ale jest zgodne z określoną zasadą, którą dzieci same odtwarzały z pamięci.

W trakcie układania szlaczków, które miały być potem „psute” , zaobserwowaliśmy istotną różnicę zachowań między dziećmi młodszymi i starszymi. Młodsze układały szlaczek, którego motyw podstawowy stanowiła kombinacja dwóch kafelków. Uczniowie starszych klas, znając cel zadania (zepsucie tego, co jest zaproponowane jako sytuacja wyjściowa) zaproponowali długą kombinację kafelków, bardzo trudną do zapamiętania. W tak zbudowanym przykładzie nie było powtarzających się fragmentów. Podejście to okazało się naturalną sytuacją do doprecyzowania warunków zadania i do rozmowy o geometrycznych regularnościach szlaczków.

- *Kodowanie i dekodowanie szlaczka*

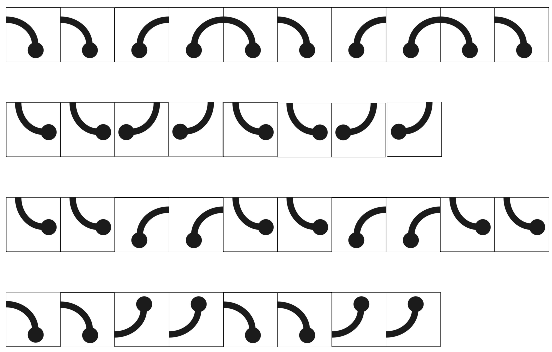
Aby wprowadzić uczniów w proces kodowania i dekodowania informacji oraz odkrywania struktury szlaczka, posłużyliśmy się schematycznym rysunkiem. Uczniom zadanie przedstawiono w formie informacji, że dzieci z innej szkoły wykonały szlaczek, ale przesłały tylko jego schemat (rys. 4). Przygotowano dwa schematy – jeden dla uczniów młodszych, drugi dla starszych, z klas IV – VI.



Rys. 4. Schematyczne rysunki szlaczka:
a) dla dzieci młodszych, b) dla uczniów klas IV – VI

Celem tych zajęć było sprowokowanie do opisywania słowami zależności tkwiących w tych szlaczkach. Zakładaliśmy, że zajęcia będą prowokować do argumentowania i dyskusji, niełatwych w obrębie zjawisk geometrycznych.

Każde z dzieci próbowało znaleźć prawidłowości w szlaczku według swojego pomysłu (rys. 5). Okazało się, że powstały różne wzory. W ten sposób wywiązała się dyskusja nad możliwościami interpretacji podanego nam kodu. Uczniowie stwierdzili, że groty strzałek mogą (choć wcale nie muszą) oznaczać kropki w motywie i zaczęli spontanicznie rysować swoje pomysły na tablicy. Każdy chciał narysować swój szlaczek na tablicy i podzielić się swoim pomysłem na rozkodowanie informacji.



Rys. 5. Sposoby rozkodowania szlaczka przez uczniów z klas IV – VI

W całym procesie odkodowywania szlaczka istotne było zwrócenie uwagi na jego strukturę i na różne możliwości interpretacji podanej informacji, sprowokowanie dyskusji nad strukturą szlaczka, poszukiwanie różnorodnych rozwiązań, dyskusja nad ich poprawnością i możliwościami zaakceptowania w klasie. Uczniowie tworzyli szlaczki odpowiadające kodowi, porównywali swoje rozwiązania z innymi, szukali podobieństw i różnic między rozwiązaniami. W sposób naturalny uwaga uczniów skoncentrowała się na różnicach między dwoma kafelkami. Te różnice zostały uwypuklone poprzez dyskusję kodu – strzałki. Kod strzałka takich różnic nie podkreślał. Był on „niewrażliwy” na orientację elementu – nie wskazywał, czy w danym miejscu musi być kafelek lewy czy prawy. Dzieci raczej odczytały zakodowany motyw pokazany na rysunku jako: mają to być cztery kafelki w relacji wewnętrznej dwa–dwa.

3. Układanki kierowane

Kolejną fazą projektu były tzw. układanki kierowane. Do odpowiednio przygotowanej muzyki uczniowie tworzyli układankę o zadanym temacie. Celem zajęć była obserwacja naturalnych skojarzeń dziecięcych z wywołanym tematem, wzmocnionym odpowiednią muzyką. Muzyka w sposób naturalny funkcjonuje w czasie, mówi o jakimś przebiegu i o zmianach od chwili A do chwili B. W założeniach więc nawiązywaliśmy do budowania dynamicznych skojarzeń z wizualną reprezentacją, tworzoną przez dziecko. Staraliśmy się tak dobrać tematy układanek, aby odpowiadały bądź kojarzyły się z przekształceniami geometrycznymi. Tak więc w ramach tych zajęć budowaliśmy związki między słowem (znaczeniem słowa), muzyką, i wizualną reprezentacją tworzoną poprzez związki między kafelkami. Z matematycznego punktu widzenia zależało nam na nadaniu odpowiednich znaczeń relacjom geometrycznym, ale to znaczenie każde dziecko budowało na podstawie swoich indywidualnych doświadczeń.

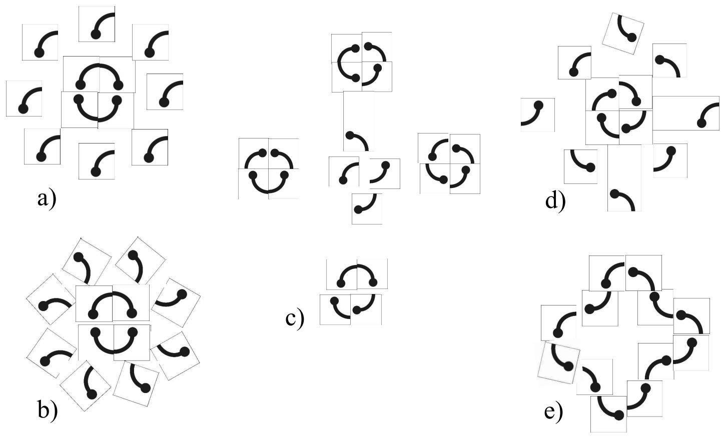
Zasugerowane tematy to:

- rwąca rzeka – mająca ukierunkowywać na wykorzystanie translacji;
- karuzela – wykorzystanie obrotów;
- lustro – wykorzystanie symetrii osiowej.

Tego typu zabieg dydaktyczny był spowodowany brakiem jednego z oczekiwanych wcześniej efektów – refleksji nad wykonywanymi przekształceniami związanymi z przemieszczaniem kafelek. Dzieci wciąż nie zwracały uwagi na rodzaje ruchów wykonywanych przy układaniu kafelków, interesowała ich jedynie końcowa aranżacja.

„Rwącą rzekę” dzieci często budowały jako poskręcaną i zagmatwaną linię. Temat generalnie nie wywołał skojarzenia z translacją, ale w niektórych pracach widoczny był powtarzający się motyw. W powtórzeniach dzieci wykorzystywały translację (tworzyły pewnego rodzaju szlaczek). Proces powstawania układanki związany był z wykonywaniem przez dzieci przemyślanych ruchów – obrotów i przesunięć poszczególnych kafelków.

Podczas realizacji tematu „karuzela” w układankach było widać głównie obroty (rys. 6). Niezwykle interesujące było obserwowanie procesu powstawania układanki. W „karuzelach” układanka była budowana naokoło. Część z nich rozpoczynała się od wyróżnienia elementu centralnego, a następnie wokół tego miejsca dziecko układało pozostałe elementy; można to nazwać aranżacją obrotową.



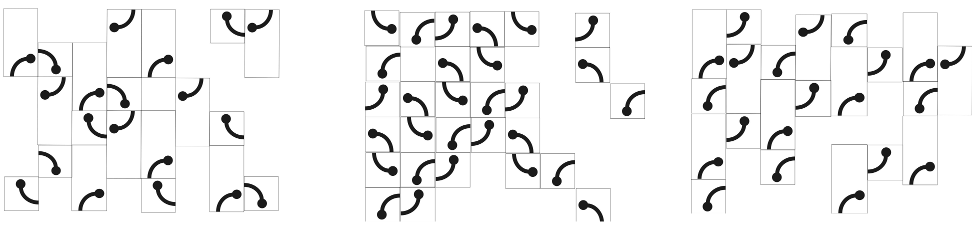
Rys. 6. Układanki do tematu „Karuzela”

Zajęcia w ramach „układanek kierowanych” pokazały nam (nauczycielom) jak trudno skojarzyć pewne własne wyobrażenia z wyobrażeniami uczniów oraz jak trudno znaleźć odpowiednie podłoże semantyczne do poszczególnych rodzajów przekształceń izometrycznych na płaszczyźnie. Podczas dyskusji, analizując otrzymane wyniki, pojawiła się sugestia: może zamiast określeń „rwąca rzeka”, „lustro”, „karuzela”, użyć sformułowań dynamicznych typu: „jazda na karuzeli”.[1] Jest to niewątpliwie sugestia warta przetestowania.

4. Rekonstrukcja posadzki

To zadanie było w pewnym sensie dualne do zadania polegającego na naprawianiu zepsutego szlaczka. Uczniowie dostali do uzupełnienia trzy mozaiki dwuwymiarowe, konstruowane według różnych reguł (rys. 7). Konstrukcję posadzek zainspirowały uwagi S. Turnaua dotyczące deseni dwuwymiarowych (Turnau, 1988).

Posadzki były tworzone z kafelków kwadratowych i prostokątnych, co miało uczulić uczniów na problem odległości pomiędzy elementami.



Rys. 7. Posadzki do rekonstrukcji w ramach SLE „Kafelki”

[1]Dziękujemy prof. M. Korcz z UAM w Poznaniu za tę podpowiedź.

To zadanie było już dla uczniów wyzwaniem. W różnym stopniu starali się mu podołać. Niektórzy stosunkowo szybko odkryli regułę we wzorze, twierdząc: *To jest proste, bo każda podłoga układa się w jakiś wzór*. Część nie wiedziała, jak można odtworzyć całość, mając tylko niekompletny fragment.

Na sugestię nauczyciela dzieci pomagały tym, którzy nie mieli pomysłu jak zrekonstruować posadzkę. Aby móc pomóc, dzieci musiały zwerbalizować swoje spostrzeżenia, wyjaśnić, w jaki sposób odnalazły wzorek na posadzce. Pojawiły się różne pomysły na uzupełnienie brakujących miejsc (fot. 4).

Fot. 4

Gdy uczniowie odczuwają niedosyt informacji, mówienie o geometrycznych własnościach narzuca się w sposób spontaniczny. Brakujące fragmenty informacji powstają wtedy na drodze argumentacji. Język jest narzędziem pomagającym w odtworzeniu tego, czego nie widać (w tym przypadku – brakujących fragmentów układanki). Można z tego wnioskować, że w sytuacji, gdy wizualna informacja jest oceniana przez dzieci jako pełna, opisywanie jej słowami nie ma sensu. Może to być powód, dla którego dzieci, funkcjonujące na poziomie wizualnym (pierwszym, wg. van Hiele) nie używają języka.

Podsumowanie

Kafelki – jako materiał dydaktyczny – są dobrym narzędziem dla dzieci 4 – 6 letnich (Swoboda, 2006), a także dla uczniów szkoły podstawowej. Pozwalają one dzieciom pracować na swoim własnym poziomie, ze swoją własną twórczością. Nawet jeśli zadanie jest ukierunkowane (np. budujemy wzorek, posadzkę), dziecko samodzielnie kreuje swoją pracę, samo tworzy. Takie działania stymulują go w kierunku zauważania regularności, funkcjonowania zgodnie z regułą. Dzieje się to niezależnie od wieku dzieci. Uwidacznia się przy tym duże zróżnicowanie między dziećmi w dostrzeganiu i stosowaniu regularności w swoich wytworach, w „geometrycznym patrzeniu”. Z wcześniejszych badań wynika, że sześciolatki, które stosują regularności, „znacząco lepiej radzą sobie w edukacji szkolnej od tych, które organizując przestrzeń takich regularności nie stosowały” (Swoboda, 2006). Obserwacja uczniów klas IV – VI, prowadzona w ramach opisywanego projektu, potwierdza tę tezę.

Patrząc z perspektywy roku pracy w projekcie, należy stwierdzić, że opisywane zajęcia w znacznym stopniu rozwinęły dziecięcą percepcję. Dowodem na to jest układanie coraz bardziej skomplikowanych układanek przez dzieci. Te dzieci, które początkowo nie były w stanie ułożyć wzoru, potem stosowały już regularności. Często nie są one jeszcze zachowane w długim ciągu powtórzeń, jednak w pracach dzieci zapanował pewnego rodzaju ład i przejrzystość. Dominująca symetria lustrzana jest stopniowo uzupełniana o symetrię obrotową.

Projektując zadania i aktywności dla dzieci związane z kafelkami nie byliśmy świadomi tak szerokich możliwości ich zastosowania. Nasi uczniowie, pracując na lekcjach, podpowiedzieli nam wiele nieoczekiwanych rozwiązań i zasugerowali kierunki pracy.

Zgodnie z założeniami SLE, tworzone środowisko musi być ukierunkowane na istotne matematyczne treści, gdyż wtedy uczniowie mają szansę działać na różnych poziomach, zgodnie z naturalnym zróżnicowaniem występującym pomiędzy nimi. Bogate matematycznie środowisko sprawia, że ujawnia się naturalne zróżnicowanie danej społeczności i jest ono czynnikiem motywującym jednostkę. Nauczyciel jest częścią SLE i on także musi być „wzmacniany”. Na niego oddziałuje dana społeczność, którą kieruje, ale to nie jest wystarczające. Nauczyciel sam może nie dostrzec wielu możliwości proponowanego SLE i sposobów wykorzystania go jako źródła motywacji. Potrzebuje on wsparcia ze strony badaczy-dydaktyków. Taka jest właśnie konstrukcja *Substantial Learning Environmet*.

Literatura

[1] Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., Sarama, J.: 1999, *Young Children's Concepts of Shape*, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 30, nr. 2, p. 192 – 212.

[2] Callingham, R.: 2004, *Primary students' understanding of tessellation: an initial exploration*, Proceedings of the 28th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2, p. 183 – 190.

[3] Ginsburg, H., P.: 2002, *Little children, big mathematics: learning and teaching in the pre-school*, W: A. D. Cockburn, E. Nardi (red.), Proceedings of the 26th Annual Conference PME, Norwich, vol. 1, p. 1 – 13.

[4] Hejný, M., Jirotkova, D.: 2004, *Svět aritmetiky a svět geometrie*, w: M. Hejny, J. Novotna, N. Stehlikova, (red.), Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, Univerzita Karlova v Praze – Pedagogicka fakulta, Praha.

[5] Hejny, M.: 1997, *Rozwój wiedzy matematycznej*, Dydaktyka Matematyki 19, s. 15 – 28.

[6] Hejný, M., Jirotková,D.: 2009, *Środowisko edukacyjne – Autobus*, w: E. Swoboda, J. Guncaga (red.), Child and Mathematics, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, s. 144 – 170.

[7] Jagoda, E.: 2004, *Kształt i położenie, czyli statyczne i dynamiczne ujęcie relacji symetrii* (*studium przypadku*), Dydaktyka Matematyki 27, s. 51 – 90.

[8] Jagoda, E.: 2008, *Building the concept of line symmetry*, w: Maj, B., Pytlak, M., Swoboda E. (red.), Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, s. 109 – 120.

[9] Jonassen, D.: 1999, *Designing Constructivists Learning Environments*, w: Charles M. Reigeluth (red.), Instructional-Design Theories and Models vol. II, Routlegde.

[10] Marchini, C., Vighi, P.: 2009, *Can we develop geometrical understanding by focusing to isometries? A teaching experiment by the means of geometrical artefacts*, w: J. Novotna, H., Moraova (red.), SEMT'09 – International Symposium Elementary Math. Teaching, Prague: UK-PedF, p. 169 – 176.

[11] Myers, D. G.: 2004, *Intuicja, jej siła i słabość*, Biblioteka Moderatora, Wrocław.

[12] Rożek, B.: 2009, *Kształty w zabawach z najmłodszymi – epizody dydaktyczne*, w: Swoboda, E., Guncaga, J. (red.), *Child and Mathematics*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, s. 93 – 101.

[13] Scherer, P. 2007, *Investigating children learning mathematics – investigating mathematics.* W: Novotná, J., Moraova, H. (red.), SEMT 2007, Proceedings: Approaches to Teaching Mathematics at the Elementary Level Prague: Charles University, s. 22 – 32.

[14] Swoboda, E.: 2006, *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

[15] Swoboda, E.: 2009, *Regularności geometryczne w uczeniu się dzieci*, w: Swoboda, E., Gunčaga, J. (red.), Dziecko i matematyka, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

[16] Turnau, S.: 1988, *Ornamenty*, w: Semadeni, Z. (red.), Nauczanie początkowe matematyki, tom 4, s. 228 – 240.

[17] Van Hiele, P.: 1986, *Structure and Insight*, A Theory of Mathematics Education, Academic Press Inc. London.

[18] Vopěnka, P.: 1989, *Rozpravy s Geometrii*, Panorama, Praha.

[19] Wittmann, E. Ch.: 1995, *Mathematics education as a 'Design Science'*, Educational Studies in Mathematics 29, p. 355 – 374.

[20] Wittmann, E. Ch.: 2001, *Developing mathematics education in a systemic process*, Educational Studies in Mathematics 48, p. 1 – 20.

Ewa Swoboda pracuje w Uniwersytecie Rzeszowskim w Rzeszowie.
Edyta Jagoda pracuje w Zespole Szkół Społecznych nr 1 *w Rzeszowie*