Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Justyna Hawro (Rzeszów)

Wpływ trudności związanych z rozumieniem twierdzeń matematycznych na rozumienie pojęcia dowodu oraz na umiejętność jego analizowania i konstruowania

Wstęp

W podstawie programowej z matematyki dla liceum jako jeden z celów edukacyjnych wymienia się poznanie podstawowych elementów myślenia matematycznego. Jednym z tych elementów jest dedukowanie jako metoda ustalania matematycznej prawdy. Kształceniu rozumienia istoty dedukcji służą przede wszystkim sytuacje, w których uczniowie, najpierw z pomocą nauczyciela, a potem samodzielnie, konstruują lub analizują dowody różnych stwierdzeń danych z góry lub sformułowanych jako hipotezy w toku rozwiązywania zadań. Jednak, jak zauważa S. Turnau (2001): *Dowody pojawiają się na lekcjach rzadko (jeżeli w ogóle), bo i czasu na matematykę o wiele mniej, i nauka rozumowania dedukcyjnego zeszła w celach kształcenia nieomal poza horyzont. Matematyka szkolna – wbrew hasłom sprzed półwiecza – oddaliła się od akademickiej bardziej niż kiedykolwiek* (s. 25).

To tłumaczyłoby, przynajmniej po części, skąd wynikają trudności, jakie możemy obserwować u studentów matematyki, zwłaszcza dopiero rozpoczynających studia wyższe, w rozwiązywaniu problemów wymagających konstrukcji lub analizy dowodu matematycznego. Rozpoznanie tychże trudności oraz refleksja nad ich przyczynami stanowiły jeden z celów podjętych przeze mnie badań dydaktycznych.

W badaniach zajmowałam się między innymi wpływem rozumienia twierdzenia matematycznego na umiejętność dowodzenia. Na podstawie analizy zebranego materiału badawczego starałam się w sposób szczegółowy wyróżnić te trudności studentów, które dotyczyły rozumienia twierdzenia i miały związek z rozumieniem pojęcia dowodu oraz umiejętnością jego analizowania i konstruowania. W niniejszej pracy przedstawię niektóre z nich i podejmę próbę ich opisu, biorąc przy tym pod uwagę różne aspekty rozumienia twierdzenia matematycznego wyróżnione przez M. Klaklę i T. Ramsa (1980).

1. Aspekty rozumienia twierdzenia

W logice, za twierdzenie danej teorii opartej na aksjomatyce X uznaje się każde wyrażenie wywiedlne z wyrażeń zbioru X przy zastosowaniu praw logicznych (Turnau, 1984). Sens, który nadaje się twierdzeniu w potocznym języku matematyki oraz w jej nauczaniu jest nieco odmienny (Nowecki, 1978). Można się o tym przekonać studiując podręczniki, prace matematyczne, czy też opracowania metodyczne. I tak na przykład w podręczniku autorstwa Z. Krygowskiej, S. Kulczyckiego i S. Straszewicza (1954) czytamy: *Zdania zaś, wypowiadające te własności utworu, które nie są zawarte w wypowiedziach pewników lub definicji, nazywamy twierdzeniami. Można wypowiadać twierdzenia prawdziwe lub fałszywe; należy zawsze dokładnie zbadać czy wypowiedziane twierdzenie jest prawdziwe, czy nieprawdziwe, czyli udowodnić prawdziwość lub nieprawdziwość każdego twierdzenia* (s. 36). W innej pracy Z. Krygowska (1977) pisała: *Terminu „twierdzenie" używamy w znaczeniu tradycyjnie przyjętym w szkolnym języku. Tak więc mamy „twierdzenia prawdziwe" – to jest wywiedlne w ramach danej teorii, „twierdzenia fałszywe" – to jest takie, których zaprzeczenie jest wywiedlne w tej teorii, twierdzenia, o których nie wiemy jeszcze, czy są „prawdziwe" czy „fałszywe". Teoretycznie możemy mieć jeszcze twierdzenia, o których wiemy, że są niezależne od aksjomatów teorii, o tym mówi się wyjątkowo rzadko w szkole* (s. 103).

Te dwie ostatnie wypowiedzi wskazują jednocześnie, do jakiego rozumienia przez uczniów pojęcia twierdzenia, jego prawdziwości, powinno się dążyć w nauczaniu. Celem jest nie to, aby uczeń znał definicję twierdzenia, ale żeby odróżniał twierdzenia od definicji, rozumiał hipotetyczno-dedukcyjny charakter twierdzenia, dostrzegał związek prawdziwości twierdzenia z jego wywiedlnością. Wszystko to, według M. Klakli i T. Ramsa (1980), składa się na rozumienie twierdzenia w aspekcie metodologicznym.

Rozumienie sensu metodologicznego, choć istotne, jest jednak tylko jednym z wyróżnionych przez wspomnianych autorów aspektów rozumienia twierdzenia matematycznego. Wśród innych znajdują się dwa dotyczące rozumienia treści twierdzenia; są to:
- rozumienie struktury formalnej twierdzenia;
- rozumienie semantyczne twierdzenia.

Rozumienie struktury formalnej twierdzenia to świadomość jego budowy logicznej, ale także umiejętność dokonywania operacji formalnych na twierdzeniu (formułowania zaprzeczeń, przekształcania do postaci równoważnej) oraz odróżnianie twierdzeń wzajemnie odwrotnych. W rozumieniu semantycznym istotne jest zarówno rozumienie sensu poszczególnych terminów występujących w twierdzeniu, jak również związków, powiązań pomiędzy tymi terminami. Dopiero to warunkuje rozumienie sensu całego twierdzenia.

W kontekście tychże trzech aspektów rozumienia twierdzenia matematycznego przedstawię i omówię niektóre wnioski ze swoich badań.

2. Uwagi o organizacji badań

Badania, o których mowa w tym opracowaniu, prowadzone były na Uniwersytecie Rzeszowskim, w ramach ćwiczeń do przedmiotu „Wstęp do matematyki" w semestrze zimowym roku akademickiego 2006/2007. Grupę badawczą stanowili studenci pierwszego roku matematyki z dwóch grup ćwiczeniowych.

Diagnozowanie trudności wymagało takiej organizacji pracy na zajęciach, która umożliwiałaby zbieranie danych o tym, jak poszczególni członkowie grupy badawczej radzą sobie z konstruowaniem prostych dowodów czy analizowaniem ich gotowych tekstów. Dlatego też często studenci byli proszeni o samodzielne rozwiązywanie różnych zadań i notowanie wyników na papierze. Prace te były przeze mnie gromadzone i poddawane analizie, głównie jakościowej.

Narzędzia badawcze stanowiły zarówno zadania specjalnie konstruowane na potrzeby diagnozy (tworzyły one tzw. „testy diagnostyczne"), jak również zadania rozwiązywane w ramach zajęć i dotyczące zagadnień objętych programem przedmiotu „Wstęp do matematyki" (a więc z rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów, teorii zbiorów, teorii relacji i funkcji, teorii mocy). Wśród jednych i drugich przeważały zadania wymagające samodzielnego skonstruowania prostego uzasadnienia lub odpowiedzi na pytania dotyczące tekstu podanego już dowodu.

W rozważaniach przedstawionych w niniejszym opracowaniu wykorzystam odpowiedzi udzielone przez studentów do wybranych zadań testu diagnostycznego, rozwiązywanego przez nich na początku semestru.

3. Trudności studentów związane z rozumieniem twierdzeń i ich wpływ na umiejętność dowodzenia

Analiza zebranego materiału badawczego ujawniła różne błędy, braki studentów w rozumieniu twierdzeń matematycznych we wszystkich aspektach wymienionych w punkcie 1. mojej pracy. W dalszej części omówię niektóre z nich podkreślając jednocześnie ich związek z trudnościami dotyczącymi rozumienia pojęcia dowodu, jego roli oraz umiejętności jego konstruowania i analizowania. Rozpocznę od tych, które dotyczą rozumienia twierdzenia w aspekcie metodologicznym.

Rozumienie sensu metodologicznego twierdzenia

Oprócz części zadaniowej, test diagnostyczny, który studenci rozwiązywali na początku semestru, zawierał część ankietową. W ankiecie tej pytałam między innymi o to, co to jest dowód i do czego służy. W komentarzu słownym do tego pytania wyjaśniłam studentom, iż chodzi mi tutaj o ich rozumienie tego pojęcia. Analizując zebrane odpowiedzi spostrzegłam, iż tylko 21 studentów wiązało dowód z twierdzeniem. Inni pisali na przykład, że:

> *Dowód jest po to aby potwierdzić definicję i ją uzasadnić.*
> (podobnie odpowiadało 9 osób)
>
> *Dowód służy do potwierdzenia definicji lub twierdzenia.*
> (podobnie odpowiadało 4 osoby)
>
> *Dowód służy do potwierdzenia danej tezy.*
> (podobnie odpowiadało 7 osób)

Wypowiedzi te wskazują na to, że ich autorzy nie rozumieją, albo błędnie rozumieją znaczenie terminów takich jak definicja, twierdzenie, teza; nie odróżniają definicji od twierdzenia, utożsamiają twierdzenie z jego tezą. W konsekwencji prowadzi to do nieporozumień związanych z pojęciem dowodu i jego rolą. Zaobserwowane u studentów trudności dotyczące rozumienia kwestii metodologicznych mogą świadczyć o tym, iż w nauczaniu na poziomie gimnazjum i szkoły średniej kwestie te nie są wystarczająco szeroko i głęboko z uczniami omawiane.

Ci studenci, którzy zdają się rozumieć, że dowodzi się twierdzeń matematycznych, widzą rolę dowodu dwojako:

- jako sprawdzenie albo uzasadnienie prawdziwości twierdzenia; odpowiadają na przykład tak:
  Służy do tego, żeby pokazać, że twierdzenie jest prawdziwe.
- jako wyjaśnienie, dlaczego twierdzenie jest prawdziwe; odpowiadają na przykład tak:
  Dowód jest to wytłumaczenie twierdzenia i pomaga zrozumieć to twierdzenie.

Na podstawie tychże odpowiedzi można by sądzić, że są oni świadomi tego, po co konstruuje się dowód, że rozumieją związek prawdziwości twierdzenia z jego wywiedlnością.

Rozumienie przez studentów związku dowodu twierdzenia z prawdziwością tego twierdzenia okazało się być jednak raczej powierzchowne, niewystarczająco głębokie, skoro nie byli oni zdolni odwołać się do tej wiedzy znajdując się w sytuacji nietypowej, prawdopodobnie dla nich nowej, gdzie nie mogli dać gotowej, wyuczonej odpowiedzi. Miało to miejsce w związku z następującym zadaniem, podobnym do tego, które w swoich badaniach wykorzystywał B. Nowecki (1968), a potem G. Treliński (2006). Brzmiało ono tak:

Zadanie 1

Twierdzenie: Jeżeli w trójkącie prostokątnym długość przeciwprostokątnej jest większa od sumy długości przyprostokątnych, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest większy od sumy kwadratów długości przyprostokątnych.

Założenia:
1) trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b i przeciwprostokątnej c
2) $c > a + b$

Teza:
$c^2 > a^2 + b^2$

Dowód:
Z zał. 2)

$$c > a + b.$$

Ponieważ $a, b, c > 0$, to

$$c^2 > (a + b)^2$$

i dalej

$$c^2 > a^2 + 2ab + b^2.$$

Ale

$$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2,$$

zatem

$$c^2 > a^2 + b^2.$$

Pytania:
1) Czy dowód twierdzenia jest poprawny?
Odpowiedź: ....
Uzasadnienie: ....
2) Czy to twierdzenie jest prawdziwe?
Odpowiedź: ....
Uzasadnienie: ....

W zadaniu oczekuje się odpowiedzi na pytanie o prawdziwość twierdzenia, którego poprawny dowód został podany, ale którego założenie nigdy nie może być spełnione. Ja dodatkowo w tezie twierdzenia umieściłam zależność, która stoi w sprzeczności z bardzo dobrze znaną studentom zależnością pomiędzy długościami przyprostokątnych i przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, o której mowa w twierdzeniu Pitagorasa.

Zadanie rozwiązywało 30 studentów. Aby móc badać rozumienie przez nich związku pomiędzy prawdziwością twierdzenia a jego wywiedlnością, brałam pod uwagę ich odpowiedzi na oba pytania jednocześnie. Tabela 1 przedstawia ich zestawienie.

PYTANIE 1	**PYTANIE 2**	**LICZBA ODPOWIEDZI**
TAK	TAK	0
TAK	NIE	9
NIE	NIE	18
NIE	TAK	3

Tabela 1. Zestawienie odpowiedzi do zadania 1

Żaden student nie odpowiedział poprawnie, to znaczy nie dał pozytywnej odpowiedzi na obydwa pytania. Wszystkie osoby, które uznały dowód za poprawny, stwierdziło jednocześnie, że twierdzenie jest nieprawdziwe. Oznaczałoby to, iż nie rozumieją oni związku dowodu twierdzenia z prawdziwością tego twierdzenia - dopuszczają taką możliwość, że **twierdzenie posiadające poprawny dowód może być fałszywe**. Oto przykład odpowiedzi:

> 1) Czy dowód twierdzenia jest poprawny?
> Odpowiedź: *Myślę, że tak*
> Uzasadnienie: *W dowodzie korzystamy z założenia i z pewnych zależności, które prowadzą do potwierdzenia tezy.*
>
> 2) Czy to twierdzenie jest prawdziwe?
> Odpowiedź: *Nie*
> Uzasadnienie: *Wydaje mi się, że kwadrat przeciwprostokątnej nie powinien być większy, a równy sumie kwadratów przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym. Przynajmniej nie znałam dotąd takiej zależności, ponieważ było mi znane jedynie twierdzenie Pitagorasa:* $c^2 = a^2 + b^2$.

W prezentowanym rozwiązaniu autor dokonuje oceny prawdziwości twierdzenia w zupełnym oderwaniu od oceny poprawności dowodu. Uznaje on twierdzenie za fałszywe, gdyż, jak twierdzi, nie może być tak, że w trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej jest większy od sumy kwadratów długości przyprostokątnych. Podobnego argumentu używają jeszcze trzy inne osoby, które uznały dowód za poprawny. Pozostali stwierdzają, że twierdzenie nie jest prawdziwe, bo jego założenie jest fałszywe. To odczucie sprzeczności, brak zgodności występujących w tezie lub założeniu twierdzenia zależności z doświadczeniami oraz wiedzą studentów, zdają się, przy ocenie prawdziwości twierdzenia, przeważać nad argumentem o poprawności dowodu.

Jak wynika z tabeli 1 najliczniejszą grupę stanowili studenci, którzy udzielali negatywnej odpowiedzi na obydwa pytania zadania. Niepoprawność dowodu tłumaczyli tym, że jest niejasny, wychodzi się w nim od błędnego założenia lub że twierdzenie jest fałszywe. Można sądzić, iż według tych, którzy używali argumentu podobnego do drugiego z wymienionych, w dowodzie można korzystać tylko z prawdziwych założeń. Przyjęcie takiej interpretacji budzi jednocześnie wątpliwości dotyczące innej kwestii – rozumienia przez tych studentów dowodów nie wprost.
Ci zaś studenci, którzy posługiwali się w uzasadnieniu argumentem o fałszywości twierdzenia, rozumowali według poprawnego schematu: jeżeli twierdzenie jest fałszywe, to jego dowód nie może być poprawny. Rzecz jednak w tym, że błędnie ocenili prawdziwość twierdzenia.

Dwie osoby, które uznały dowód za błędny, piszą, że twierdzenie jest nieprawdziwe, „ponieważ z przeprowadzonego dowodu to nie wynika”. Odpowiedź ta ujawnia inne błędne rozumienie związku dowodu z prawdziwością twierdzenia: **jeżeli dowód jest niepoprawny, to twierdzenie nie jest prawdziwe**. Prawdopodobnie nie zdają sobie sprawy, że błędny dowód nie oznacza jeszcze, że twierdzenie jest fałszywe – być może da się je udowodnić inaczej.
U innych studentów, którzy ocenili dowód jako niepoprawny, w uzasadnieniu fałszywości twierdzenia pojawiały się najczęściej takie jak poprzednio argumenty, to znaczy, że:

- założenie jest fałszywe – studenci odpowiadali na przykład tak: *Taki trójkąt nie istnieje, zawsze suma dwóch boków musi być większa od trzeciego z boków.*
- teza jest fałszywa – studenci odpowiadali na przykład tak: *Ponieważ Pitagoras stwierdził, że* $c^2 = a^2 + b^2$ *gdzie* c *– przeciwprostokątna,* a, b *– przyprostokątne.*

Uznanie twierdzenia za fałszywe na podstawie fałszywości założenia ma prawdopodobnie związek z przekonaniem studentów, że twierdzenie w postaci implikacji można przyjąć wtedy, gdy jego założenie jest prawdziwe. Ci zaś, którzy posługiwali się argumentem o fałszywości tezy być może utożsamiali twierdzenie z jego tezą i w związku z tym byli skłonni uznać twierdzenie za fałszywe, gdy zauważyli niezgodność tezy z własnymi doświadczeniami i wiedzą. Przyczyn obu tych błędów można upatrywać w tym, iż zazwyczaj rozważa się z uczniami takie uszczegółowienia poznawanych przez nich twierdzeń, w których zarówno w poprzedniku jak i następniku występują wyrażenia prawdziwe. Rzadko uznaje się za potrzebne mówienie o takich przypadkach, w których poprzednik i następnik są wyrażeniami fałszywymi lub poprzednik jest wyrażeniem fałszywym, a następnik prawdziwym. Skutkiem takiego postępowanie może być, według S. Turnaua (1971), utożsamienie przez niektórych uczniów (a potem studentów) zdania „zachodzi twierdzenie $p \Rightarrow q$” ze zdaniem „o ile prawdą jest p, to prawdą jest też q”. W konsekwencji niektórzy są skłonni uznać twierdzenie za nieprawdziwe lub pozbawione sensu, gdy jego założenie jest fałszywe; dla innych zaś, którzy poznali tylko takie przykłady uszczegółowień twierdzenia, w których poprzednik jest wyrażeniem prawdziwym, założenia wydają się być zbędnym dodatkiem, który można odrzucić i w związku z tym twierdzenie w postaci implikacji utożsamiają oni z jego tezą.

Ten ostatni błąd, jak stwierdza S. Turnau (1971), może mieć swoje źródło także w formie, sposobie prowadzenia dowodów twierdzeń, które stwarzają dla ucznia pozór, iż dowodzi się prawdziwości tezy, gdy w istocie dowodzi się prawdziwości twierdzenia $Z \Rightarrow T$, gdzie Z jest założeniem, a T – tezą twierdzenia. W pracy tego autora czytamy: *Mówi się: „zakładamy, że…, udowodnimy, że…”, „teza została wykazana”, w ostatnim kroku dowodu przepisuje się tezę i obok niej dodaje się tradycyjną formułkę „co było do udowodnienia”; itp. Postępowanie to odpowiada wprawdzie poprawnemu stosowaniu twierdzenia o dedukcji. Jednak na tej podstawie słabszemu uczniowi może się wydawać, że założenia odgrywają jedynie rolę pomocniczą, są potrzebne w dowodzie, ale raz „udowodniona” teza jest od nich niezależna* (s. 104).

Mówiąc o tym, iż niektórzy studenci nie rozumieją hipotetycznej struktury twierdzenia i są skłonni utożsamiać twierdzenie w postaci implikacji z jego tezą, należy zwrócić uwagę również i na to, że błąd ten może prowadzić do pojawienia się także innych trudności; wspomnę tu o dwóch:

1. Studenci nie tylko w przypadku twierdzenia w postaci implikacji, ale także twierdzenia w postaci równoważności byli skłonni utożsamiać je z jednym z jego członów. Potwierdzenie tego znajdziemy w rozwiązaniach następującego zadania:

Zadanie 2

Twierdzenie:

$$\underset{a,b>0}{\forall}\left(a = b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b}\right).$$

Polecenia:

1) Sprawdź, czy twierdzenie jest spełnione dla $a = 4$ i $b = 4$.
2) Sprawdź, czy twierdzenie jest spełnione dla $a = 2$ i $b = 6$.

Zadanie rozwiązywało 54 osoby. Dwudziestu studentów szukając odpowiedzi na pytanie 1) i 2), ograniczyło się jedynie do sprawdzenia, czy dla podanych liczb zachodzi wzór $\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b}$. Nie zwracali przy tym uwagi na warunek $a = b$ występujący po drugiej stronie równoważności. Oto przykład takiego rozwiązania:

1) Sprawdź, czy twierdzenie jest spełnione dla $a = 4$ i $b = 4$.
   $\frac{4+4}{2} = \frac{2\cdot4\cdot4}{4+4}$ $\quad \frac{8}{2} = \frac{32}{8}$ $\quad$ 4=4
   Jest spełnione
2) Sprawdź, czy twierdzenie jest spełnione dla $a = 2$ i $b = 6$.
   $\frac{2+6}{2} = \frac{2\cdot2\cdot6}{2+6}$ $\quad 4 \neq 3$
   Nie jest spełnione

Analizując odpowiedzi studenta można wysnuć przypuszczenie, iż dla niego twierdzenie to w tym wypadku prawa strona równoważności. Od tego, czy występująca tam równość jest dla danych liczb spełniona, czy też nie, uzależnia on odpowiedź na pytanie o prawdziwość twierdzenia.

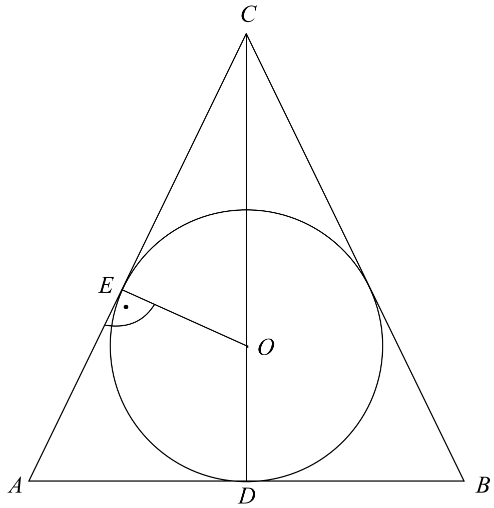
2. Rozumienie twierdzenia w postaci implikacji jako jego tezy może wpływać także na pojawienie się trudności związanych ze stosowaniem twierdzeń w dowodach. Uczniowie często odrywając tezę nie dokonują sprawdzenia, czy w danym przypadku są spełnione założenia twierdzenia. Jedno z możliwych wyjaśnień, dlaczego tego czynią, może brzmieć następująco: jeśli utożsamiają twierdzenie z jego tezą, to wtedy w istocie przy jego stosowaniu nie ma czego sprawdzać (Nowecki, 1978). Być może to właśnie stanowiło przyczynę błędu, który blisko jedna czwarta badanych studentów popełniła odpowiadając na pytanie:

Czy w dowodzie wykorzystano inne (oprócz tw. Pitagorasa) twierdzenia?

dotyczące tekstu następującego twierdzenia i jego dowodu:

> **Twierdzenie:** Jeżeli promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny ma długość r, a wysokość opuszczona na podstawę ma długość h, to postawa ma długość $\frac{2hr}{\sqrt{h^2-2hr}}$, a ramię $\frac{h^2-hr}{\sqrt{h^2-2hr}}$.

Dowód:



W trójkącie OEC mamy

$$|EC|^2 = |OC|^2 - r^2.$$

Ponieważ $|OC| = h - r$, po przekształceniach dostajemy

$$|EC|^2 = \sqrt{h^2 - 2hr}. \tag{1}$$

Łatwo zauważyć, że $|\angle EOC| = |\angle CAD|$ oraz

$$tg\angle EOC = \tfrac{|EC|}{r}, \quad tg\angle CAD = \tfrac{h}{|AD|},$$

a zatem

$$\tfrac{|EC|}{r} = \tfrac{h}{|AD|}. \tag{2}$$

Z (1) i (2) otrzymujemy, że

$$|AD| = \tfrac{hr}{\sqrt{h^2-2hr}},$$

a więc

$$|AB| = \tfrac{2hr}{\sqrt{h^2-2hr}}.$$

Wiadomo, że $|AE| = |AD|$. Wobec tego

$$|AC| = |AE| + |EC| = |AD| + |EC| = \tfrac{h^2-hr}{\sqrt{h^2-2hr}}.$$

Aż 14 osób w odpowiedzi wskazało na twierdzenie Talesa uznając, iż to z niego wynika występująca w dowodzie równość (2). Oto przykład odpowiedzi:

W dowodzie wykorzystano twierdzenie Talesa np. $\frac{|EC|}{r} = \frac{h}{|AD|}$.

Żaden ze studentów, który udzielił odpowiedzi podobnej do tej cytowanej, nie zastanawiał się raczej nad tym, czy spełnione są założenia twierdzenia Talesa, a w związku z tym, czy możliwe jest jego zastosowanie (pomijam już to, że nie zauważyli oni, iż równość (2) wynika z innych twierdzeń). Tym, co mogło zachęcić do wskazywania na twierdzenie Talesa, jest postać równości (2) – przywołuje ona skojarzenia z jego tezą, którą zwykle zapisuje się w postaci równości dwóch ułamków.

To, że student utożsamia twierdzenie w postaci implikacji z jego tezą lub, gdy ma ono postać równoważności, z jednym z jej członów, oznacza jednocześnie, iż nie dostrzega on, nie rozumie struktury logicznej twierdzenia, a co za tym idzie jego sensu. O innych trudnościach związanych z rozumieniem struktury formalnej twierdzenia i ich wpływie na umiejętność dowodzenia będzie mowa w kolejnym podrozdziale.

Rozumienie struktury formalnej twierdzenia

Świadomość struktury formalnej twierdzenia jest jednym z warunków właściwego jego rozumienia, ale także często umożliwia znalezienie dowodu - ułatwia wskazanie założenia (założeń) i tezy, zaplanowanie struktury dowodu. W przypadku niektórych form wypowiedzi twierdzenia jego struktura logiczna jest od razu widoczna, w innych ukryta i należy ją samodzielnie wyodrębnić. To, czy studenci potrafią zinterpretować strukturę logiczną twierdzenia zapisanego w formie orzekającej (Pieprzyk, 1985), badałam w punkcie pierwszym następującego zadania:

Zadanie 3

1) Które z poniższych zdań wyrażają to samo, co zdanie:

Dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

(Zakreśl odpowiedź TAK – jeśli w twojej opinii zdanie wyraża to samo, NIE – jeżeli zdanie nie wyraża tego samego.)

A) a i b są liczbami dodatnimi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

TAK **NIE**

B) Jeżeli a i b są liczbami dodatnimi, to $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

TAK **NIE**

C) Jeżeli $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, to a i b są liczbami dodatnimi.

TAK **NIE**

2) Czy zdanie umieszczone w ramce w punkcie 1) jest prawdziwe? Jak się o tym przekonać? Przedstaw swoje uzasadnienie.

Zadanie rozwiązywało 27 osób. Po przeanalizowaniu rozwiązań okazało się, iż, jeśli chodzi o zdanie z punktu B), to 23 studentów zaznaczyło odpowiedź TAK (pozostali wybrali zdanie z punktu C)). Można by więc rzec, że stosunkowo wielu studentów poprawnie rozumiało strukturę logiczną twierdzenia z ramki, gdyby nie analiza ich odpowiedzi do punktów A) i C). O tym, jakie konfiguracje odpowiedzi pojawiały się w ich rozwiązaniach i ilu studentów daną konfigurację wybierało, informuje nas tabela 2.

A	**B**	**C**	**Liczba osób**
NIE	TAK	TAK	9
NIE	TAK	NIE	7
TAK	TAK	TAK	5
–	TAK	NIE	1
TAK	TAK	–	1

Tabela 2. Zestawienie odpowiedzi udzielonych w punkcie 1) zadania 3

Z tabeli odczytujemy, że całkowicie poprawnie odpowiedziało tylko 7 osób. Sześć uznało, iż zdania, w których występują zwroty „jeżeli..., to..." oraz „wtedy i tylko wtedy, gdy..." wyrażają to samo co dane twierdzenie. Trudno stwierdzić, czy świadomi są oni tego, iż zaznaczając odpowiedź TAK w punkcie A) i B) jednocześnie, za to samo mówiące uznali dwa zdania, z których jedno ma postać implikacji, a drugie równoważności. Jeśli tak, to mogłoby to świadczyć o pewnych trudnościach natury logicznej – nieznajomości lub braku rozumienia funktorów, które kryją się pod wyrażeniami „jeżeli..., to..." oraz „wtedy i tylko wtedy, gdy...".

Jeszcze więcej studentów (14 osób) było skłonnych uznać za wyrażające to samo dwie implikacje wzajemnie odwrotne, tak jakby to nie miało znaczenia, który z warunków je tworzących znajduje się w poprzedniku, a który w następniku implikacji. A być może za prawdziwą uznają następującą równoważność $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$.

Podsumowując te rozważania należałoby stwierdzić, iż nie wszyscy studenci potrafili poprawnie zinterpretować strukturę logiczną danego twierdzenia. Co więcej, mogliśmy zaobserwować, iż niektórzy nie odróżniają twierdzeń wzajemnie odwrotnych, albo też za mówiące to samo uznają twierdzenie w postaci implikacji oraz w postaci równoważności.

Wszystkie te trudności dotyczące rozumienia struktury logicznej twierdzenia nie pozostają bez wpływu na umiejętności związane z dowodzeniem, chociażby w taki sposób, że wielu studentów nie potrafi wskazać założeń i tezy w twierdzeniu zapisanym w formie orzekającej. Świadczyć mogą o tym rozwiązania następującego zadania:

Zadanie 4

W twierdzeniu
Każda funkcja liniowa o współczynniku kierunkowym dodatnim jest rosnąca.
wskaż założenie i tezę oraz przedstaw jego dowód.

Tylko dwunastu z 27 studentów, którzy rozwiązywali zadanie, poprawnie wyróżniło założenia i tezę. Dziesięć osób w ogóle nie podjęło próby odpowiedzi; niektórzy stwierdzali wprost: *nie potrafię podać założeń, tezy i dowodu.* Pozostali popełniali różne błędy, na przykład jako założenie podawali całe twierdzenie albo mylili założenie z tezą. Trudno na podstawie tych odpowiedzi stwierdzić, czy trudności te wynikały z nierozumienia samego twierdzenia, czy też terminów takich jak założenie, teza. Faktem jest, że żaden ze studentów błędnie wskazujących założenia i tezę, nie podał poprawnego dowodu. Może to świadczyć, iż w nauczaniu matematyki nie jest realizowane następujące zalecenie dydaktyczne: *Każde twierdzenie powinno być formułowane, szczególnie w klasach młodszych, w różnych postaciach; nie wolno nauczycielowi poprzestać na jednej wypowiedzi twierdzenia* (...). *Zalecenie to należy rozumieć w tym sensie, że w miarę wzbogacania zasobu twierdzeń uczniowie powinni samodzielnie te twierdzenia analizować z różnych punktów widzenia, niezależnie od ich sformułowania* (Pieprzyk, 1985).

Można oczekiwać, że gdyby studenci potrafili przeformułować twierdzenie z zadania 4 do postaci warunkowej, to potrafiliby również wskazać założenie i tezę.

Trudności studentów w rozumieniu struktury logicznej twierdzenia z jednej strony, a z drugiej niedostrzeganie przez nich związku pomiędzy postacią logiczną twierdzenia i strukturą dowodu, ujawniły się też na przykład w takiej sytuacji: jako dowód twierdzenia o następującej postaci

$$\underset{a,b>0}{\forall}\left(a = b \Leftrightarrow \tfrac{a+b}{2} = \tfrac{2ab}{a+b}\right)$$

studenci byli skłonni zaakceptować następujące rozumowanie:

Ustalmy $a > 0$ i $b > 0$.
Jeżeli $a = b$, to

$$\tfrac{a+b}{2} = \tfrac{a+a}{2} = \tfrac{2a}{2} = a$$

oraz

$$\tfrac{2ab}{a+b} = \tfrac{2a^2}{a+a} = \tfrac{2a^2}{2a} = a,$$

a zatem

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Można stąd wnioskować, że studenci odpowiadając na pytanie o poprawność tego dowodu nie zastanawiali się nad treścią twierdzenia, jego budową logiczną i ogólnym schematem, strukturą dowodu. Cały ich wysiłek był skierowany raczej na ocenę poprawności kolejnych kroków w dowodzie. Ponieważ wszystkie przekształcenia w cytowanym fragmencie były wykonane bezbłędnie, uznali oni całe rozumowanie za poprawne.

Rozumienie semantyczne twierdzenia

Rozumienie struktury formalnej twierdzenia jest ściśle związane z jego rozumieniem semantycznym. Dlatego też, gdy pojawiają się błędy i trudności w obszarze pierwszego z wymienionych aspektów, może to wskazywać na istnienie trudności także i w drugim.

Rozważając aspekt rozumienia semantycznego twierdzenia odwołam się znowu do rozwiązań zadania 3, ale tym razem do odpowiedzi udzielonych do punktu 2) zadania. Studenci mieli w nim rozstrzygnąć, czy zdanie

Dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

jest prawdziwe, czy też nie oraz przedstawić uzasadnienie.
Z rozwiązań studentów możemy wnioskować o tym, jak rozumieli oni zdanie z ramki, ale jednocześnie przekonać się, jak błędy, nieporozumienia związane z rozumieniem twierdzenia wpływały na pojawienie się błędów w uzasadnieniu.

Dwie osoby nie udzieliły w ogóle odpowiedzi na pytanie o prawdziwość twierdzenia. Zdecydowana większość tych, którzy podjęli próbę rozwiązania, formułując uzasadnienie dążyła do tego aby pokazać, że $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, wykorzystując założenie, przyjmując, że a i b są liczbami dodatnimi. Postępowali przy tym różnie: sześć osób prowadziło rozumowanie ogólnie, dwanaście poprzestało na sprawdzeniu, że nierówność jest prawdziwa dla jednej lub kilku par liczb dodatnich, podobnie jak autorka tego uzasadnienia:

np. jeśli $a = 4$ *i* $b = 4$

$$\frac{4+4}{2} \geqslant \sqrt{4 \cdot 4}$$

$$4 \geqslant 4$$

Wprawdzie wydaje się, że studentka rozumie zdanie z ramki jako implikację: *jeżeli a i b są liczbami dodatnimi, to* $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, ale nie mamy pewności, czy wie, iż ma do czynienie z twierdzeniem ogólnym. Jeżeli tak, to albo nie rozumie kwantyfikatora ogólnego, albo uważa, że, aby pokazać prawdziwość rozważanej nierówności dla wszystkich liczb, wystarczy wskazać jeden przykład, który to potwierdza (B. Pawlik (2004) nazywa to fałszywym przekonaniem „dowód przez przykład").

To dlaczego niektórzy studenci uznają sprawdzenie na przykładach za wystarczający dowód można próbować wyjaśnić w jeszcze inny sposób, a mianowicie błędnym rozumieniem słowa „dowolny", występującym w tekście twierdzenia. Analizując na przykład taką wypowiedź:

> *Zdanie jest prawdziwe, można się o tym przekonać podstawiając za a i b dowolne liczby dodatnie np:* $a = 1$ $b = 2$
>
> $$\frac{1+2}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot 2}$$
> $$\frac{3}{2} \geqslant \sqrt{2}$$
> $$1\frac{1}{2} \geqslant 1,\ldots$$

można odnieść wrażenie, że jej autor interpretuje słowo „dowolne" nie, jakbyśmy oczekiwali, w sensie „dla każdego", ale raczej jako „jakikolwiek wyróżniony obiekt" (zwracała na to uwagę B. Pawlik (2004)).
Powstanie obu opisanych powyżej niepoprawnych schematów myślowych może być według M. Ciosek (1992), przynajmniej w części, spowodowane błędami w nauczaniu. Błędy te polegają na tym, że nauczyciele na wielu lekcjach matematyki akceptują ogólne wnioski, jakie formułują uczniowie na podstawie obserwacji przykładów. Wspomniana autorka zauważa również, że nawet jeśli, po sformułowaniu wniosku, prowadzone jest z uczniami jakieś ogólne rozumowanie, to nie zmienia ono postaci wniosku. W konsekwencji: *Uczeń może więc sądzić, że tzw. dowód narzucającego się z przykładów wniosku jest pewnym dodatkowym zwyczajem, który niczego już zmienić nie może, a który wykonuje się z jakiegoś bliżej nieokreślonego powodu* (Ciosek, 1992, s. 152).

Okazuje się jednak, iż nie wszyscy studenci rozumieli dane twierdzenie jako implikację. Cztery osoby konstruując uzasadnienie uznało za konieczne rozważenie, albo przynajmniej wspomnienie o przypadku, gdy a i b są liczbami ujemnymi. Oto przykład takiej odpowiedzi:

> *Zdanie umieszczone w ramce w punkcie 1 jest prawdziwe. Można się o tym przekonać podstawiając w miejsce a i b dowolne liczby dodatnie, np.* $a = 3$ $b = 7$
>
> $$\frac{3+7}{2} \geqslant \sqrt{21}, \quad 5 \geqslant 4,5 \qquad \sqrt{21} \approx 4,5$$
>
> *z tego wynika, że dla dowolnych liczb dodatnich zdanie to jest słuszne.*
> *Jeśli natomiast podstawimy liczby ujemne nierówność* $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ *nie będzie prawdziwa i z tego możemy wnioskować, że podane zdanie jest prawdziwe.*

Można przypuszczać, że autor tego rozwiązania rozumuje według schematu: jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to nierówność jest prawdziwa, jeśli zaś a i b nie są liczbami dodatnimi – co dla niego oznacza, że są liczbami ujemnymi – to nierówność nie zachodzi. To przemawiałoby za tym, że rozumie on twierdzenie następująco:

a i b są liczbami dodatnimi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

(nawet jeśli nie uświadamia sobie tego wyraźnie). U podstaw tego rodzaju błędu może leżeć „ludzka skłonność do odczytywania implikacji jako równoważności" (Lewicka, 2000, s. 282).

W rozważaniach przedstawionych powyżej zwróciłam uwagę na to, że niewłaściwe rozumienie terminu, słowa występującego w twierdzeniu (chodziło tam o słowo „dowolny") może stać się przyczyną błędów w uzasadnieniu. Błędy w dowodach, uzasadnieniach wynikające z niewłaściwego rozumienia pojęć matematycznych występujących w twierdzeniach, pojawiały się także w rozwiązaniach innych zadań. Jedna ze studentek pokazała na przykład, że funkcja $f(x)=2x+3$ jest rosnąca w swojej dziedzinie, w następujący sposób:

$$2x + 3 > 0$$
$$2x > -3$$
$$x > -1\tfrac{1}{2} \quad x \in (-1\tfrac{1}{2}, \infty)$$

Prawdopodobnie pomyliła funkcję rosnącą z funkcją o wartościach dodatnich – zamiast badać monotoniczność funkcji, wyznaczyła zbiór argumentów, dla których dana funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie.

4. Podsumowanie

Odpowiedzi i rozwiązania studentów przedstawione w tej pracy potwierdzają to, iż niektóre nieporozumienia dotyczące pojęcia dowodu, jego roli, a także trudności pojawiające się podczas prób konstrukcji czy analizy nawet prostych rozumowań, uzasadnień, mają swoje źródło w niezrozumieniu lub błędnym rozumieniu twierdzeń matematycznych w różnych aspektach. Przeprowadzone przeze mnie badania diagnostyczne pomogły mi te trudności związane z rozumieniem twierdzeń w sposób szczegółowy wyodrębnić. Zaobserwowałam, że studenci:

- błędnie rozumieją znaczenie terminów: twierdzenie, założenie, teza;
- twierdzenie w postaci implikacji utożsamiają z jej następnikiem, a twierdzenie w postaci równoważności z jednym z jej członów;
- nie rozumieją związku dowodu z prawdziwością twierdzenia;
- błędnie interpretują strukturę logiczną twierdzenia;

- nie potrafią wskazać założenia (założeń) i tezy;
- nie odróżniają twierdzeń wzajemnie odwrotnych;
- błędnie rozumieją sens terminów występujących w twierdzeniu;
- mają trudności ze zrozumieniem sensu twierdzenia.

Oczywiście, jak wynika z rozważań przedstawionych w niniejszej pracy, wymienione tu trudności występowały z różnym natężeniem. Niektórych doświadczało wielu studentów, inne pojawiały się bardziej sporadycznie. Można jednak było zaobserwować, iż te z nich, które dotyczą rozumienia sensu metodologicznego twierdzenia, znajdowały swoje odbicie przede wszystkim w trudnościach związanych z rozumieniem pojęcia dowodu i jego roli. Chociaż nie tylko; mogły mieć wpływ także na pojawienie się trudności w analizowaniu czy konstruowaniu dowodów, na przykład w związku ze stosowaniem twierdzeń w dowodach. Niewątpliwie jednak trudności z konstruowaniem i analizowaniem dowodów miały związek przede wszystkim z nierozumieniem lub błędnym rozumieniem treści twierdzenia, którego dotyczyły, a więc nierozumieniem lub błędnym rozumieniem znaczenia pojęć, terminów, które w twierdzeniu występowały lub/i związków pomiędzy tymi pojęciami, terminami. Co więcej, jeśli nawet studenci potrafili zinterpretować postać logiczną twierdzenia lub gdy była ona od razu dana, widoczna, to nie zastanawiali się, jak w związku z tym powinien przebiegać dowód, nie potrafili wykorzystać tej wiedzy do zaplanowania lub analizy struktury dowodu.

Podsumowując te spostrzeżenia i wnioski należałoby stwierdzić, iż eliminowanie trudności związanych z dowodzeniem twierdzeń i dalsze rozwijanie kompetencji studentów w tym zakresie, wymaga zaplanowania i zastosowania różnorodnych działań, zabiegów, które służyłyby pogłębianiu rozumienia twierdzeń we wszystkich wymienionych aspektach.

Literatura

[1] Ciosek, M.: 1992, *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka Matematyki 13, s. 65 – 161.

[2] Klakla, M., Rams, T.: 1980, *O rozumieniu twierdzeń matematycznych w nauczaniu szkolnym*, Matematyka. Zbiór artykułów, WSP, Kielce, s. 153 – 167.

[3] Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki,* część 3, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

[4] Krygowska, Z., Kulczycki, S., Straszewicz, S.: 1954, *Nauczanie geometrii w klasach licealnych szkoły ogólnokształcącej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa.

[5] Lewicka, M.: 2000, *Myślenie i rozumowanie*, w: Strelau, J. (red.): Psychologia, Podręcznik akademicki, Tom 2, Psychologia ogólna, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk, s. 275 – 316.

[6] Nowecki, B.: 1968, *Pojęcie dowodu i dowodzenie w nauczaniu szkolnym*, niepublikowana rozprawa doktorska, WSP Kraków.

[7] Nowecki, B.: 1978, *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

[8] Pawlik, B.: 2004, *Fałszywe przekonania dotyczące przekształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki*, (niepublikowana rozprawa doktorska), Akademia Pedagogiczna, Kraków.

[9] Pieprzyk, H.: 1985, *Różne formy wypowiedzi twierdzeń*, Oświata i Wychowanie, Wersja B9, s. 58 – 59.

[10] Treliński, G.: 2006, *Trzy przykłady, czyli o stymulowaniu i pielęgnowaniu bezradności matematycznej*, w: Czajkowska M., Treliński, G. (red.): Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.

[11] Turnau, S.: 1971, *Elementy logiki w nauczaniu matematyki*, w: Janowski W. (red.): Wybrane zagadnienia z metodyki matematyki, PZWS, Warszawa.

[12] Turnau, S.: 1984, *Logiczny wstęp do matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

[13] Turnau, S.: 2001, *O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole* (rozszerzony tekst wystąpienia), Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka Matematyki 23, s. 25 – 33.

Autorka pracuje w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Rzeszowskiego
w Rzeszowie