Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Zbigniew Semadeni (Warszawa)

Kształtowanie pojęć w matematyce dla wszystkich

Mówiąc o „matematyce dla wszystkich", mam na myśli matematykę przeznaczoną dla ogółu obywateli danego kraju i przy tym dla zwykłych uczniów, a więc ani uzdolnionych ponad przeciętną, ani mających nadmierne trudności z matematyką. Zajmę się tu jedynie jednym aspektem tego złożonego problemu, a mianowicie kwestią kształtowania pojęć matematycznych w szkole masowej.

Kształtowanie pojęcia a definiowanie pojęcia

Słowo „pojęcie" jest stale używane w publikacjach z dydaktyki matematyki, natomiast prawie nie pojawia się w akademickich publikacjach z matematyki[1] (podobnie jak jego angielski odpowiednik – słowo *concept*). Mówi się więc po prostu „pole figury", „definicja pola". Nie ma potrzeby mówienia o „pojęciu pola". Wiąże się to z powszechnym przekonaniem matematyków, że pojęcia wprowadza się przez podanie definicji. Takie podejście – traktowane jako oczywiste przy prezentacji przedmiotów uniwersyteckich – bywa nieraz przenoszone do podręczników szkolnych i wywiera negatywny wpływ na nauczanie.

Znaczną część podstawowych pojęć matematyki szkolnej uczeń poznaje nie poprzez dowiedzenie się (od nauczyciela lub z podręcznika) ich definicji, lecz w wyniku długotrwałego procesu zbierania doświadczeń związanych z tymi pojęciami, refleksji nad nimi, stosowaniu ich i rozwiązywania zadań. Dydaktycy mówią o kształtowaniu się pojęć matematycznych u ucznia. Proces ten jest przedmiotem badania wielu teorii psychologicznych, używających do jego opisu rozmaitych konstrukcji teoretycznych, nieraz niemożliwych do przełożenia na język innych teorii. Oprócz terminów dobrze znanych matematykom, jak „abstrahowanie" i „uogólnianie", używanych jest wiele innych, jak np. „interioryzacja".

[1] Czasem słowo „pojęcie" pojawia się w przedmowie do książki lub we wstępie do nowego rozdziału, na przykład „w rozdziale tym wprowadzimy pojęcie niezależności zdarzeń", ale później pojawia się jedynie typowa definicja.

Przykłady niedefiniowalnych pojęć matematyki szkolnej (od nauczania początkowego po szkołę średnią)

Zacznę od oczywistego przykładu: pojęcia liczby naturalnej nie da się zdefiniować w szkole, a definicje przyjmowane w teorii mnogości nie nadają się dla uczniów. Również pojęcia: ułamek, liczba ujemna i liczba rzeczywista kształtują się w wyniku długotrwałego procesu zajmowania się nimi na lekcjach i poza lekcjami, a nie jako efekt podania definicji. W I połowie XX wieku wiele wysiłku włożono w adaptację formalnych definicji arytmetyki teoretycznej dla celów szkolnych, przyniosło to jednak więcej szkody niż pożytku.

W dedukcyjnym ujęciu matematyki przyjmuje się niewielką liczbę (kilka lub kilkanaście) pojęć niezdefiniowanych, nazywanych pojęciami pierwotnymi, np. liczba w arytmetyce, punkt w geometrii, zbiór i element zbioru. W edukacji szkolnej taki status powinny mieć początkowo wszystkie pojawiające się pojęcia, dopiero później stopniowo dochodzą nowe pojęcia oparte na definicji.

Swoistą trudność stwarza kwestia zdefiniowania podstawowych pojęć algebry szkolnej. Czym np. jest *jednomian*? Podawane bywa określenie: „jednomian to wyrażenie będące iloczynem liczby i zmiennych". Definicja ta, gdyby ją przyjąć jako punkt wyjścia nauczania, ma podstawową wadę: aby ją zrozumieć, trzeba już wiedzieć, co to jest jednomian. Niezbędne okazują się też dodatkowe wyjaśnienia, na przykład to, że $3x^5$ jest jednomianem, bo to iloczyn $3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$. Ponadto zaraz pojawiają się wątpliwości: dlaczego cx^5 uważamy za jednomian? To już wymaga zrozumienia subtelnej roli symbolu literowego c, który w przeciwieństwie do x nie oznacza zmiennej, lecz stałą. Bardziej zasadnicze przy takim określeniu jednomianu jest pytanie: co to jest wyrażenie? Cóż uczniowi pomoże na przykład stwierdzenie, że wyrażenie to pewien układ symboli, zbudowany zgodnie z pewnymi regułami?

W *Encyklopedii Szkolnej* WSiP (wydanie 1997) w definicji jednomianu nie ma słowa „wyrażenie", lecz „funkcja". Jest to określenie nierównoważne poprzedniemu, a ponadto wymaga rozumienia pojęcia funkcji.

Pojęcie funkcji jest szczególnie trudne. W historycznym rozwoju matematyki kształtowało się ponad 200 lat, w kolejności odwrotnej niż jest dzisiaj prezentowana w nauczaniu. Najpierw pojawiło się pojęcie pochodnej (u Newtona i Leibniza), półtora wieku później – pojęcie granicy i ciągłości (Cauchy), a najtrudniejsze okazało się właśnie pojęcie funkcji. Euler, d'Alembert, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Weierstrass, Dedekind, Peano – tylu słynnych matematyków przyczyniło się do dzisiejszego naszego rozumienia tego pojęcia (Juszkiewicz, 1976). Każdy z nich posuwał tę kwestię o istotny krok. Aby sobie lepiej uzmysłowić, co mogło sprawiać im trudność, przypomnijmy, że d'Alembert toczył z Eulerem spór o to, czy $|x|$ jest funkcją.

Programowo lekceważąc te znane fakty historyczne, wielu dydaktyków europejskich głosiło (około 1969 r.), że uczeń powinien wcześnie poznać definicję funkcji, bo to znakomicie ułatwi mu uczenie się innych pojęć. Niektórzy głosili na przykład, że znajomość funkcji liniowej ułatwi zrozumienie proporcjonalności, ignorując przy tym oczywisty fakt, że do zrozumienia każdego nowego, trudnego pojęcia niezbędne jest poznanie wielu przykładów, a niemal wszystkie typowe przykłady funkcji odwołują się właśnie do proporcjonalności. Pojawia się błędne koło, charakterystyczne dla prób naśladowania w nauczaniu szkolnym dedukcyjnego układu matematyki.

W XX wieku często definiowano funkcje jako pewne zbiory par (x, y). Ale zbiór par $(x, f(x))$ to wykres funkcji. Czy funkcja jest tym samym co jej wykres? Jako przykład weźmy funkcję sinus. Jej wykresem jest sinusoida. Sinusoida to pewna figura geometryczna. Czy można zatem powiedzieć, że funkcja sinus to figura geometryczna?

A jak zdefiniować, czym jest *procent*? Czy to liczba, czy funkcja, czy coś jeszcze innego? Czy 1% to – jak niektórzy twierdzą – po prostu inny zapis liczby 0,01 ? Otóż moim zdaniem w pojęciu procentu tkwią immanentnie (nieusuwalnie) pewne procedury określające, jak tego pojęcia należy sensownie używać. Tak więc pomimo, że możemy napisać sin0,01, bo to sinus pewnej liczby, nie zaakceptujemy wyrażenia sin1%, bowiem nie mieści się w zakresie sensownego użycia pojęcia procentu. Jeszcze bardziej bezsensownie może jawić się równość $\sqrt{1\%} = 10\%$, która formalnie wynika z równości $\sqrt{0,01} = 0,1$, jeśli przyjąć, że $1\% = 0,01$. Tak więc 1% nie jest po prostu liczbą, lecz czymś znacznie subtelniejszym, co w pewnych sytuacjach może być zastąpione przez liczbę $\frac{1}{100}$, ale pełni inną rolę, którą poznaje się w różnorodnych, praktycznych sytuacjach. W dedukcyjnej arytmetyce pojęcie procentu może w ogóle się nie pojawić, bowiem potrzebne jest ono jedynie w zastosowaniach matematyki, których dedukcyjna teoria ciała $\Re$ z reguły nie uwzględnia.

Podobnie w terminie „równanie” tkwi nie tyle jakaś definicja, co sens tego słowa, rozumiany w kontekście procedur związanymi z równaniami i ze stosowaniem (zarówno na poziomie gimnazjum, jak i na przykład równań różniczkowych). Na przykład czy $x = 3$ jest równaniem? Formalnie tak, ale na ogół myślimy o tym inaczej, dla nas to nie równanie, lecz rozwiązanie równania.

Pozornie łatwa jest kwestia, co rozumiemy przez *kwadrat*. To prostokąt o równych bokach, a *prostokąt* to czworokąt mający 4 kąty proste. I tu zaczynają się kłopoty. Uczniowi, który właśnie dowiedział się, że kąt to pewien nieograniczony obszar na płaszczyźnie, trudno jest pojąć, jak może być nieograniczony kąt w czworokącie, który jest przecież figurą ograniczoną? A co to jest *czworokąt*? W *Encyklopedii Szkolnej* WSiP czytamy na przykład, że to domknięta, płaska figura geometryczna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą o 4 bokach (czyli ograniczona sumą 4 odcinków nie mających innych punktów wspólnych niż końce tych odcinków). Definicja ta jest niepełna, bowiem słowo „ograniczona" nie jest już zdefiniowane i musi być rozumiane intuicyjnie[2]. Widać, jak to wszystko się wikła, gdy obstajemy przy konieczności definiowania. Uczniowie jednak bez żadnych definicji wiedzą, co to jest kwadrat, dzięki oglądaniu, rysowaniu, wycinaniu, przylepianiu rozmaitych kwadratów, układaniu mozaik, mierzeniu boków i zbieraniu doświadczeń. Nie ma też żadnej potrzeby definiowania czworokąta w szkole, wystarczy pojęcie rozumiane intuicyjnie, a główną trudnością dla ucznia jest przypadek czworokąta wklęsłego.

Ważnym pojęciem – już w szkole podstawowej – jest równoległość. Ale równoległość czego? Typową odpowiedzią jest: równoległość prostych. Jednakże dla ucznia szkoły podstawowej abstrakcyjne pojęcie nieograniczonej prostej jest bardzo trudne, a w praktyce zazwyczaj chodzi o równoległość odcinków, którą określa się, odwołując się do równoległości prostych.

Pokazałem przykłady pojęć, których nie warto definiować w szkole. Można je objaśniać, wywodząc je z odpowiednio dobranych przykładów. Z drugiej strony, gdy matematyka szkolna staje się bardziej zaawansowana, niezbędne staje się wprowadzanie pewnych pojęć (takich jak „kwadrat liczby", „trapez", „sinus") przez podanie definicji (oczywiście też podbudowanej przykładami).

Konstruowanie znaczenia

Powyższe przykłady pokazują, że podstawowe pojęcia matematyczne – takie jak liczba, kwadrat, procent – wymagają długiego procesu kształtowania ich u ucznia. Definiując jakieś pojęcie w ramach teorii dedukcyjnej, zazwyczaj wybiera się jakąś jego cechę uznaną za punkt wyjścia, a następnie, korzystając z tej definicji, dowodzi się innych własności rozpatrywanego obiektu. Uczeń natomiast poznaje różne własności pojęć, których się uczy, nie będąc jeszcze w stanie myśleć o nich w kategoriach dedukcyjnego wynikania.

Istotnym aspektem kształtowania pojęcia jest konstruowanie jego znaczenia, jego sensu, w szczególności tego, do czego dane pojęcie służy. Uczeń powinien pojąć cel, dla którego wprowadza się to pojęcie, poznać sytuacje, w których jest to użyteczne narzędzie do rozwiązywania jakichś zagadnień. W miarę możności sam powinien to narzędzie skutecznie stosować.

Od ćwierć wieku większość osób prowadzących badania w zakresie dydaktyki matematyki deklaruje poglądy konstruktywistyczne, wywodzące się bezpośrednio lub pośrednio z ogólnych koncepcji Piageta. Jest wiele odmian

[2]Byłoby to zresztą trudne. Definicję obszaru ograniczonego przez krzywą zamkniętą podaje się w kursie topologii (lub analizy) jako wstęp do twierdzenia Jordana o rozcinaniu płaszczyzny.

konstruktywizmu[3], wszystkie jednak za punkt wyjścia mają przekonanie, że niemożliwe jest bezpośrednie przekazanie uczniowi przez nauczyciela wiedzy matematycznej. Tworzy się ona w umyśle ucznia stopniowo, w trakcie wieloletniego procesu, w wyniku samodzielnie wykonywanych czynności i refleksji nad nimi, a rolą nauczyciela jest ten proces organizować i wspomagać.

Kontrowersje związane z interpretowaniem zasady paralelizmu w dydaktyce (zgodność ontogenezy z filogenezą)

Zasadę tę można sformułować następująco (Duda, 1982, str. 125): *Proces uczenia się przez człowieka powinien stanowić skrótowe powtórzenie procesu zdobywania wiedzy przez ludzkość.* Używa się terminów: *ontogeneza* (rozwój pojedynczego osobnika) i *filogeneza*[4] (rozwój plemienny). Analizowanie rozwoju historycznego pojęć matematycznych powinno stanowić poważny argument w dyskusjach dydaktycznych. Jeśli wiadomo, że jakieś pojęcie było trudne dla wielkich matematyków przeszłości, to musimy liczyć się też z poważnymi trudnościami u dzisiejszych licealistów. Na przykład, skoro aż do około 1870 r. figur geometrycznych nie traktowano jako zbiorów punktów, to jest to wyraźna wskazówka, że mnogościowe ujmowanie geometrii może być nieodpowiednie w szkole podstawowej.

Nie zawsze jednak paralelizm ontogeneza – filogeneza prowadzi do dydaktycznie słusznych wskazówek. Dobrym przykładem jest pojęcie liczby naturalnej. Etnografowie stwierdzili, że ludy primitywne, nie znające liczebników, wykorzystywały w różnych sytuacjach życiowych odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną. Ponieważ zgadzało się to z definicją Cantora równoliczności zbiorów, do której niepotrzebne są żadne systemy liczenia, w połowie XX wieku zaczęto postulować, by pojęcie „tyle samo" odwoływało się do równoliczności zbiorów. Na tym chciano oprzeć całą arytmetykę szkolną. W projektach programów dla klasy I dydaktycy proponowali hasła takie jak „liczba naturalna jako wspólna cecha zbiorów równolicznych", choć trudno byłoby przełożyć to na sensowne czynności dydaktyczne. Dziś wiadomo, że pominięto wtedy kluczowy czynnik,

[3]Chodzi tu o *konstruktywizm w sensie dydaktyki matematyki*, nawiązujący do psychologii. Zupełnie czymś innym jest natomiast *konstruktywizm w sensie podstaw matematyki*: mianem tym określa się rozmaite kierunki w filozofii matematyki, których wspólną cechą jest żądanie ograniczenia badanych obiektów matematyki wyłącznie do tworów konstruowalnych w jakimś ściśle sensie (na przykład rekurencyjnie).

[4]Słowo *ontogeneza* pochodzi od greckiego słowa *on* (drugi przypadek: *ontos*), znaczącego *byt*. Słowo *filogeneza* pochodzi od greckiego słowa *phylon*, znaczącego: *plemię, ród*, ale – w przeciwieństwie do znanej etymologii słowa *filozofia* – nie pochodzi od słowa philos, znaczącego między innymi *miłośnik*.

a mianowicie wpływ kulturowy środowiska na dziecko, które bardzo wcześnie, ucząc się języka, poznaje liczebniki. Wymaganie od dziecka, aby „tyle samo" opierało na łączeniu elementów w pary, było sztuczne, skoro wszyscy w otoczeniu dziecka – rodzice, sprzedawczynie w sklepie, znajomi – w takiej sytuacji liczą przedmioty. W procesie kształtowania się pojęcia liczby naturalnej w umyśle dziecka większą rolę odgrywa regularność systemu dziesiątkowego niż łączenie w pary.

Pojęcie liczby ujemnej sprawiało matematykom europejskim ogromne trudności aż do końca XVI wieku, wielu z nich nie akceptowało takich „fikcyjnych" liczb. Później liczby ujemne były powiązane z kursem algebry, stanowiły wstęp do bardziej zaawansowanej matematyki. W ostatnim ćwierćwieczu nastąpiła jednak istotna zmiana kulturowa. Liczby ujemne pojawiły się w życiu codziennym: ujemne temperatury w prognozie pogody w TV, przyciski $-1, -2, -3$ w windach warszawskiego metra, ujemne kwoty w zestawieniach bankowych (dawniej, aby ich uniknąć, bank wpisywał takie kwoty w osobnych rubryki: „winien" i „ma"). Nowe pokolenie jest już oswojone z liczbami ujemnymi, inna więc stała się ich sytuacja w nauczaniu.

Kontrowersje związane z przedwczesnym naciskiem w nauczaniu na kształtowanie pojęć

Europejskie reformy z lat 1960 – 1980 kładły nacisk na kształtowanie pojęć u uczniów. Mówiło się o potrzebie kształtowania pojęcia liczby, kształtowania pojęcia sumy liczb, kształtowania pojęcia systemu dziesiątkowego. Była to naturalna reakcja na uprzedni nadmierny nacisk na mechaniczne rachunki, ale reformatorzy przesadzili w swej gorliwości. W podręcznikach usiłowano tłumaczyć słownie dzieciom kolejne ogólne, ważne, abstrakcyjne pojęcia, podając ich naukowe nazwy, takie jak „przemienność". Dydaktycy nie byli wystarczająco świadomi, że nie da się oddzielić kształtowania pojęć arytmetycznych od rachowania i od praktycznych zastosowań. Doprowadziło to do przeteoretyzowania nauczania, czego skutki odczuwamy do dzisiaj. W najnowszych podstawach programowych z 2009 r. wyraźnie próbuje się odejść od owych złych praktyk.

Problem redukowania pojęć do bardziej podstawowych

Redukcjonizm to – ogólnie ujmując – dążenie do sprowadzenia rozpatrywanych zjawisk i obiektów do prostszych, bardziej fundamentalnych. W matematyce utożsamia się pewne pojęcia, deklarując, że dotychczasowe dwa różne pojęcia będzie się uważać za jedno. W ten sposób utożsamia się pojęcia „cecha" i „zbiór", utożsamia się funkcję z jej wykresem, a punkt z wektorem. Figury geometryczne wyraża się w układzie współrzędnych za pomocą pojęć arytmetyki i algebry, utożsamiając je z pewnymi zbiorami par lub trójek liczb. Funkcje traktuje się jako pewien specjalny przypadek relacji, a relację określa się jako zbiór par spełniających pewne warunki.

W ten sposób obiekty bogate znaczeniowo zastępuje się przez uboższe, prostsze. Pełni to fundamentalną rolę w matematyce. Ułatwia dedukcję, staje się ona czystsza, klarowniejsza, bardziej sterylna. Niestety, jeśli tendencja redukcjonizmu zdominuje naukę szkolną, obiekty matematyczne stają się bardziej sztuczne i przez to mniej zrozumiałe i trudniejsze dla uczniów. Pojęcia wywodzące się z własnych doświadczeń ucznia są na ogół bogate i trudno je zastąpić obiektami wypreparowanymi, ubogimi w znaczenie, na co zwracał uwagę Freudenthal (1991, s. 20 – 30). Powinniśmy być bardzo ostrożni z przechodzeniem do obiektów zbyt oderwanych od własnych doświadczeń ucznia. Jest to proces konieczny, ale powinien to być rozłożony w czasie i przeprowadzony możliwie naturalnie.

W XX wieku podjęto ambitny program zredukowania całej (lub niemal całej) matematyki do teorii mnogości. Później – pod hasłami „nowej matematyki" – dążono do wprowadzenia mnogościowego ujęcia do szkoły, szczególnie do geometrii i do rachunku prawdopodobieństwa. Jednakże zamiast zapowiadanego ułatwienia nauczania, podejście to stało się źródłem nowych, znacznie poważniejszych trudności. Okazało się również, że język teorii mnogości miał wiele wad jako narzędzie matematyzacji rozmaitych problemów. Jako przykład wymienię podział kwadratu na 4 przystające kwadraty. Można łatwo udowodnić, że kwadratu traktowanego jako zbiór punktów nie da się podzielić na 4 rozłączne, przystające, symetryczne zbiory (Papy, 1971). Jest to więc przykład oczywistej dla dziecka operacji myślowej, mającej swe korzenie w czynności krojenia kwadratu z papieru na 4 części, której nie da się prosto zmatematyzować w języku zbiorów.

Aby ukazać pułapki związane z używaniem języka mnogościowego, rozważmy następujące zbiory figur płaskich: zbiór A składający się z wielokątów czworobocznych i wypukłych oraz zbiór B składający się z wielokątów czterobocznych i sześciobocznych, Wprowadźmy oznaczenia: W – zbiór wielokątów wypukłych, Z_4 – zbiór czworokątów, Z_6 – zbiór sześciokątów. Wydaje się oczywiste, że A to część wspólna zbiorów Z_4 i W, natomiast zbiór B to suma zbiorów Z_4 i Z_6. Jednakże konstrukcja gramatyczna określenia zbiorów A i B jest taka sama, słowo „i" łączy dwa przymiotniki. Mimo to interpretacja tych określeń jest zupełnie różna, w pierwszym przypadku prowadzi do części wspólnej, w drugim do sumy zbiorów.

Wynika to z sensu geometrycznego, jaki nadajemy zbiorom A i B; odrzucamy interpretację A jako sumy i B jako zbioru pustego.

Bywają sytuacje, gdy język mnogościowy jest potrzebny, np. trudne jest odróżnienie koła domniętego od jego wnętrza, gdy uczeń miałby sobie to wyobrazić wizualnie. Określenie tych figur jako zbiorów z wyraźnym kontrastowaniem $<$ i $\leqslant$ pozwala na jasne rozróżnienie tych figur.

Problem wiązania różnych pojęć przy ich kształtowaniu

Około 40 lat temu w polskiej dydaktyce matematyki istniała silna tendencja, aby przy wprowadzaniu nowych pojęć możliwie wcześnie wiązać je z innymi. Postulowano, by od początku systemowo ukierunkowywać wiedzę ucznia. Na przykład w programie klasy I napisane było „Wprowadzanie odejmowania jako działania odwrotnego do dodawania" oraz „Wprowadzanie dzielenia jako działania odwrotnego do mnożenia". Część dydaktyków była zdania, że przy wprowadzaniu porównywania ilorazowego od początku dobrze jest kontrastować je z porównywaniem różnicowym. Brzmiało to sugestywnie, mnie też wydawało się to słuszne. W oficjalnych programach sugerowano, aby wykonywanie przekształceń algebraicznych w klasach VI – VIII ilustrować geometrycznie. Zofia Krygowska postulowała, by rozwiązując równania na przykład liniowe, wcześnie łączyć to z rozwiązywaniem odpowiadających im nierówności.

Stopniowo, pod wpływem nowych lektur i dyskusji dydaktycznych stawało się dla mnie jasne, że te postulaty nie były słuszne. Uważam, że – przeciwnie – na ogół, zwłaszcza w szkole podstawowej, nie należy wywodzić nowych pojęć ze wcześniej wprowadzonych pojęć. Pojęcia te powinny wywodzić się z doświadczeń ucznia, z życia codziennego lub sytuacji matematycznych, w których potrzeba takiego pojęcia staje widoczna. Na przykład odejmowanie powinno być wprowadzane jako ubywanie, a dopiero później, gdy uczniowie umieją już odejmować liczby w zakresie 10, należy stopniowo – w wyniku długiego procesu – wiązać odejmowanie z dodawaniem, pamiętając, że wszelkie odwracanie działań jest trudne dla początkującego. W wielu sytuacjach, zwłaszcza w szkole podstawowej, bardziej właściwe, moim zdaniem, jest wprowadzanie takich pojęć osobno, a dopiero potem powinno się budować rozmaite więzy między nimi.

Rozwiązywanie nierówności powinno pojawiać się wiele lat po odpowiednich równaniach nie tylko dlatego, że sprawia duże trudności uczniom. Przyczyna jest tu poważniejsza: w praktyce rzadko trzeba matematyzować konkretne zagadnienie w postaci nierówności typu $f(x) < g(x)$ (gdzie x oznacza punkt, a więc liczbę lub parę czy trójkę liczb), którą należałoby rozwiązywać poprzez ciąg równoważnych nierówności. Na ogół znacznie prościej jest najpierw napisać równanie $f(x) - g(x) = 0$ określające brzeg obszaru, w którym leżą rozwiązania danej nierówności, a dopiero po rozwiązaniu tego równania rozważa się, w których zbiorach interesujące nas wyrażenie jest dodatnie, a w których ujemne.

Problem kolejności wprowadzanych pojęć

Matematycy mają oczywistą skłonność do myślenia o kolejności wprowadzanych w nauczaniu pojęć zgodnie z ich miejscem w strukturze matematyki jako nauki. Jednakże bywa to rażąco niezgodne z naturalną kolejnością rozwoju pojęć u uczniów. Na przykład, w dedukcyjnej geometrii najprostszym obiektem jest punkt. Dla ucznia szkoły podstawowej punkt to kropka, ale ujmowanie np. odcinka jako zbioru punktów jest trudne, a w wielu przypadkach wykracza poza horyzont możliwości ucznia, który np. na pytanie, z ilu punktów składa się odcinek, odpowiada, że to zależy od tego, czym się rysuje: jak cienkim długopisem, to tych punktów będzie więcej.

Kolejność pojęć powinna być zgodna z naturalnym rozwojem pojęć u ucznia.

Przypadki typowe, przypadki nietypowe, przypadki specjalne i przypadki skrajne

Choć trudno podać jakieś ścisłe określenia takich kategorii przypadków, wyróżnienie ich poprzez podanie odpowiednich przykładów jest pożyteczne.

Gdy rozważamy kwestię kształtowania się pojęć geometrycznych na przełomie przedszkola i szkoły, musimy brać pod uwagę specyficzne trudności dzieci. Dziecko nie jest w stanie jeszcze myśleć np. o kwadracie jako o figurze mającej pewne określone własności. Wie, że narysowana figura to kwadrat, bo ono rozpoznaje, że to kwadrat, podobnie jak rozpoznaje jabłko lub krzesło. Najpierw jest to jednak kwadrat w położeniu typowym, o podstawie poziomej. Kwadrat przekręcony budzi wątpliwości. Nawet niektórzy dorośli, widząc kwadrat przekręcony o 45°, mówią, że to nie kwadrat, to romb (por. van Hiele, 2002).

Typowy prostokąt to prostokąt o takich proporcjach boków jak stronice w książce lub ekran telewizyjny. Prostokąt bardzo długi jest nietypowy (por. Hejny, 1997). Dziecko może go nazwać np. „pasek”. Gdy rysunek nie pasuje napotkanych wcześniej sytuacji, w których dorośli mówili „prostokąt”, dziecko mówi, że to nie jest prostokąt. Specyficzne trudności sprawia dziecku wyjaśnienie, że kwadrat to szczególny przypadek prostokąta. Przecież kwadrat wygląda inaczej niż prostokąt. Wszelkie tłumaczenie odwołujące się do definicji kwadratu jest dla dziecka we wczesnym wieku szkolnym zupełnie niezrozumiałe.

W arytmetyce pewne liczby są bardziej typowe, na przykład 3, 4, 5, 10, 100. Inne liczby (na przykład 73 lub 5382) są mniej typowe. Liczba 1 jest przypadkiem specjalnym w kontekście dodawania, bowiem $n+1$ to po prostu liczba następna po n, nie trzeba tu nic dodawać. Liczba 2 jest przypadkiem specjalnym dzielenia, bowiem dzielenie przez 2 to połowienie, coś dobrze znanego z życia; prawdziwa trudność ujawnia się dopiero przy dzieleniu na 3 równe części.

Natomiast liczba 0 jest przypadkiem skrajnym przy dodawaniu, a obie liczby 1 i 0 są przypadkami skrajnymi przy mnożeniu. Wynika to z braku sensownych przykładów, w których takie działanie miałoby życiowy sens dla dziecka.

Przy wprowadzaniu nowych pojęć należy zaczynać od przypadków typowych, najbardziej zrozumiałych dla ucznia. Potem powinny pojawić się przypadki specjalne, które nie są najlepsze do wstępnego kształtowania pojęć, bo są zbyt łatwe i nie ukazują należycie specyfiki nowego pojęcia. Z kolei powinny pojawiać się przypadki nietypowe, roszerzające zakres kształtowanego pojęcia. Na koniec mogą pojawić się przypadki skrajne – dopiero wtedy, gdy uczeń jest w stanie stwierdzić, że one też są do czegoś przydatne.

Przejście od procesu do pojęcia w arytmetyce i algebrze

Wielu badaczy (J. Piaget, Z. Dienes, R. Davis, E. Dubinsky, A. Sfard, E. Gray, D. Tall i inni) zajmowało się ogólną charakterystyką dróg rozwoju myślenia matematycznego, wiodących od czynności do pojęć, od ujęcia dynamicznego (coś się dzieje) do statycznego (związki między obiektami). Wyrażano to na wiele sposobów. Szczególną uwagę warto zwrócić na prace: (E. Gray, D. Tall, 1994), Sfard (1991), Dubinsky (1991). Krótkie przeglądy rozwoju tych idei można znaleźć w (Kieran, 1998, s. 219) i (Tall et al., 2000).

Wiadomo w szczególności, że dziecko poznaje pojęcie arytmetyczne najpierw w postaci procesu, który później stopniowo rozwija się do bardziej dojrzałej postaci proces–obiekt. Na przykład pojęcie liczby 6 wywodzi się z procesu liczenia: $1, 2, 3, 4, 5, 6$; dopiero później liczba 6 staje się w umyśle dziecka samodzielnym obiektem, nowym pojęciem, 6 jako 6.

Istotną rolę w tym przejściu od procesu do obiektu odgrywa kondensacja procedury, która wielokrotnie wykonywana przez ucznia, coraz sprawniej, coraz szybciej, zostaje – jak to można ująć w języku angielskim – *encapsulated*, jakby ściśnięta, ściągnięta do małej kapsułki. Również bardzo ważna jest możliwość ujęcia tego obiektu językowo i symboliczne. Słowo „sześć”, symbol 6, jak również inne terminy i symbole arytmetyczne sprzyjają takiemu przechodzeniu na wyższy poziom.

Dodawanie na przykład $4 + 3$ odbywa się najpierw na poziomie *count all*, uczeń musi liczyć wszystkie elementy od początku: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Następny poziom to *count on*, czyli doliczanie; uczeń nie potrzebuje przeliczać 4 pierwszych elementów, wystarczy mu doliczanie dodawanych: $5, 6, 7$. Składnik 4 jest już tu na poziomie obiektu, jest traktowany jako pewna całość, natomiast dodanie $+3$ jest jeszcze na poziomie procesu. Jeszcze później uczeń dochodzi do poziomu, w którym $4 + 3$ staje się obiektem. Symbol $4 + 3$ ma przy tym podwójny sens. W pewnych sytuacjach jest to *zadanie do wykonania* („oblicz $4+3$"), w innych – jest liczbą[5]. Znaczenie tej zmiany staje się wyraźnie w bardziej zaawansowanych sytuacjach, np. gdy uczeń myśli o wyrażeniu $5 \cdot (4+3)$. Jeżeli potrafi on już ująć $4+3$ jako pojedynczą liczbę, to może to wykorzystać, aby na przykład zmienić kolejność czynników. Wie więc, że $5 \cdot (4 + 3)$ to tyle samo co $(4 + 3) \cdot 5$. Ułatwia mu to obliczenia i umożliwia rozwiązywanie zadań złożonych. Uczeń na wcześniejszym poziomie potrafi wprawdzie wykonać wszystkie działania w $5 \cdot (4 + 3)$ po kolei, sekwencyjnie, otrzymując poprawny wynik, ale nie jest jeszcze w stanie myśleć strukturalnie o $5 \cdot (4 + 3)$ jako o iloczynie liczby 5 przez liczbę $4 + 3$. Na poziomie sekwencyjnym zamienienie $5 \cdot (4+3)$ na $(4+3) \cdot 5$ wymaga trudnej koordynacji dwóch złożonych procedur; na poziomie obiektów staje się to oczywiste. Uczeń na niższym poziomie nie jest w stanie wykonać pewnych operacji umysłowych, które dla ucznia na wyższym poziomie są łatwe. Uczeń, który osiągnął już ten wyższy poziom rozwoju, w oczach nauczyciela będzie uważany za zdolniejszego do matematyki.

Jak twierdzą twórcy szkicowanej tu teorii, takie przejście od poziomu proces do poziomu *proces-pojęcie* jest charakterystyczne dla rozwoju pojęć arytmetycznych, algebraicznych, trygonometrycznych oraz pojęć rachunku różniczkowego i całkowego. Na przykład, wzór $\sin\varphi = a/c$ przedstawia zarówno *procedurę* obliczania wartości stosunku odpowiedniej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej, jak i ogólne pojęcie „sinus". Symbol $7 + 2x$ może być ujmowany na poziomie procedury podstawiania za x rozmaitych liczb i obliczania wartości tego wyrażenia; znacznie wyższy poziom to traktowanie $7+2x$ jako obiektu, na którym można wykonywać rozmaite operacje, jako pewnej całości, którą można np. przenieść na drugą stronę równania. Podobne, choć bardziej zaawansowane związki odnajdujemy w analizie. Symbole takie jak $\int$, lim, df/dx itp. wywodzą się z pewnego procesu (np. przechodzenia do granicy) i oznaczają obiekt, będący efektem tego procesu.

Problem kształtowania pojęć na tle teorii Piageta

Nie będę, nawet szkicowo, omawiać tej teorii. Chcę jedynie zwrócić uwagę na tezę Piageta, że gdy pojęcia i sądy ukształtowane we wcześniejszym etapie rozwoju zostają zastąpione przez pojęcia i sądy na wyższym poziomie, to zawsze dotychczasowe struktury są integrowane z nowymi.

[5] Aby lepiej uzmysłowić sobie sens stwierdzenia „$4 + 3$ jest pojedynczą liczbą", można napisać: $4 + 3 \in \Re$.

Bardzo ważnym aspektem szkicowanych tu koncepcji, głęboko osadzonym w teorii Piageta rozwoju pojęć matematycznych (zarówno rozwoju w w ontogenezie, jak i w filogenezie) jest opis pewnych kolejnych etapów kształtowania się tych pojęć. Punktem wyjścia jest wykonywanie czynności (takich jak liczenie) na konkretnych przedmiotach fizycznych. Efektem tego jest ukształtowanie się pewnych pojęć. W następnym etapie wykonuje się już *czynności na tych abstrakcyjnych obiektach*; z kolei te *czynności* wyższego rzędu stają się stopniowo nowymi obiektami. Na tych nowych obiektach wykonuje się nowe czynności, jeszcze wyższego rzędu. W ten sposób nowe pojęcia powstają na kolejnych warstwach wcześniejszych pojęć, które nie znikają, lecz zostają przekształcone.

Widać to dobrze na przykładzie trzech pojęć z początków arytmetyki: liczba, dodawanie liczb, mnożenie, ale tego typu zjawiska można również odnaleźć w zaawansowanej matematyce uniwersyteckiej. Na przykład w kolejności: wektory, działania na wektorach, przekształcenia liniowe wektorów najpierw pojawiają się czynności na pojedynczych wektorach, następnie przekształcenie ujmowane całościowo jako pojedynczy obiekt myślowy (zapisywany symbolicznie jako macierz), potem czynności wykonywane na pojedynczych macierzach, z których z kolei wywodzą się algebry macierzy, stające się nowymi pojedynczymi obiektami, następnie rozpatruje się operacje wykonywane na algebrach macierzy itd. Takie przykłady, mniej lub bardziej wyraźne, można znaleźć we wszystkich dziedzinach matematyki, np. przejście od czynności obliczania pochodnych cząstkowych do ujmowania $\partial/\partial x$ jako pojedynczego operatora w teorii równań różniczkowych lub w mechanice kwantowej.

Tak więc pewne czynności z danego etapu stają się na następnym etapie obiektami, na których z kolei znów można wykonywać nowe czynności. Aby jednak takie przejście były możliwe, liczba wykonanych czynności musi być dostatecznie duża, stąd rola długich miesięcy liczenia przedmiotów w przedszkolu i na początku szkoły, później duża liczba obliczeń na każdym etapie rozwoju i niezbędna refleksja na nimi. Zdarza się często, że nauczyciel przechodzi na wyższy poziom tej hierarchii pojęć, gdy procedury niższego rzędu nie stały się jeszcze stabilnymi obiektami u uczniów. Powoduje to, że przestają oni rozumieć matematykę, a doraźne próby ich reedukacji są nieskuteczne, jeśli nie zrekonstruuje się wcześniejszego, zbyt pośpiesznie przelecianego etapu. Oczywiście liczba niezbędnych powtórzeń danej procedury zależy od indywidualnego dziecka. Niektóre potrzebują ich znacznie więcej niż inne.

Nawiązując do związków między filogenezą a ontogenezą, warto zwrócić uwagę na koncepcję trójek etapów (Piaget, Garcia, 1989) w dwoistym kontekście filogenezy i ontogenezy: historii nauki i rozwoju psychologicznego pojedynczych osób. Twierdzą oni, że we wszelkich szczególnych przypadkach ogólnego mechanizmu rozwoju poznawczego zawsze można wyróżnić tę samą kolejność tych etapów, nazwanych:

- *intra* (analiza pojedynczych obiektów danego etapu rozwoju);
- *inter* (analiza związków między tymi obiektami i ich przekształceń);
- *trans* (strukturalne ujęcie tych obiektów).

Interpretując to na przykładzie wspomnianych już związków dodawania z odejmowaniem, można to ująć tak: na etapie *intra* dziecko oblicza pojedyncze sumy i pojedyncze różnice; na etapie *inter* zaczyna widzieć związki między różnymi sumami oraz związki sum z różnicami. Etap *trans* jest bardziej zaawansowany, wymaga myślenia o tych działaniach całościowo, strukturalnie.

Twórcy reformy z 1967 r. postulowali nauczanie w liceum na poziomie *trans*, co okazało się przedwczesne i musiało zakończyć się niepowodzeniem. Później przez długie lata polska szkoła stopniowo wycofywała się z tego, a całkowite odejście o owych koncepcji ma swe odbicie w podstawie programowej z 2008 r.

Zjawisko spłaszczania się hierarchii pojęć

Charakterystyczną cechą rozwoju pojęć matematycznych jest tworzenie się pewnej ich hierarchii przy przyswajaniu ich przez ucznia. Na przykład mnożenie jako wielokrotne dodawanie jest dla ucznia II klasy pojęciem znacznie bardziej zaawansowanym niż dodawanie. Podobnie przejście od liczb dodatnich do ujemnych to istotny skok trudności pojęciowej. Jednakże stopniowo te skoki hierarchii spłaszczają się w świadomości ucznia. Dla dobrego maturzysty liczby ujemne to takie same liczby rzeczywiste jak dodatnie, jedne leżą na lewo od zera na osi, drugie leżą na prawo; nie ma już między nimi takiej ogromnej różnicy trudności pojęciowych jak u ucznia szkoły podstawowej. W zaawansowanym rachunku algebraicznym dodawanie i mnożenie to dwa podstawowe działania traktowane równorzędnie; wprawdzie wykonanie mnożenia bywa trudniejsze, ale nie ma między nimi jakiejś zasadniczej różnicy trudności pojęciowej. W rachunku prawdopodobieństwa wartość oczekiwana jako średnia ważona $a_1p_1 + ... + a_np_n$ jest początkowo istotnie łatwiejsza od ogólnej całki $\int XdP$, ale dla zaawansowanego studenta rachunek na całkach (na przykład przy przekształcaniu wzoru na wariancję) może być łatwiejszy od męczenia się ze średnimi ze średnich, w których pojawiają się ułamki piętrowe.

Zjawisko spłaszczania się hierarchii jest wynikiem integracji dotychczasowych pojęć w jedną, bardziej zaawansowaną całość. Umożliwia to bardziej złożone operacje umysłowe, które byłyby niewykonalne, gdyby trzeba było każdorazowo odtwarzać całą drogę poszczególnych procedur do nich wiodących.

To spłaszczanie się hierarchii pojęć ma też pewne negatywne konsekwencje. Powoduje mianowicie, że matematykom często pewne pojęcia wydają się tak proste i naturalne, że nie są w stanie wniknąć w trudności, jakie musi pokonać uczeń znajdujący się na niższym poziomie rozwoju matematycznego. Dają też „dobre rady", jak czegoś nauczać w szkole, nie zdając sobie sprawy ze skoku pojęciowego, jaki musieliby pokonać uczniowie.

Koncepcja „trzech światów" matematyki D. Talla

David Tall w szeregu prac, poczynając od (Tall, 2004), przedstawił swą koncepcję podzielenia rozwoju pojęć matematycznych na trzy istotnie różne, jakkolwiek wzajemnie powiązane linie rozwojowe, które nazwał *trzema światami matematyki*.

Pierwszy z nich, który nazwiemy *pojęciowo-percepcyjnym*[6], wywodzi się z percepcji (zwłaszcza wzrokowej), z doznań naszych zmysłów i dotyczy głównie pojęć geometrycznych. W świecie tym uznaje się coś za prawdziwe, jeśli *widzimy*, że to jest prawdziwe. Dzięki zbieraniu doświadczeń percepcyjnych, ich wizualizacji, refleksji nad nimi i dzięki użyciu specjalnego języka ludzie potrafią konstruować w umyśle pewne twory, których nie ma w przyrodzie (na przykład nie ma idealnej linii prostej), a nawet potrafią wyjść z swą wyobraźnią daleko poza świat spostrzegany (na przykład w geometrii wielowymiarowej lub nieeuklidesowej). W przypadku pojęć geometrycznych rozwój pojęć tego świata u dziecka opisał P. van Hiele[7].

Drugi z tych światów – to świat *czynnościowo-symboliczny*[8], świat symboli używanych w obliczeniach w arytmetyce, algebrze i w analizie. Symbole te wywodzą się z pewnych czynności (np. liczenia). Wielokrotne, coraz sprawniejsze ich wykonywanie prowadzi do ich kondensacji, a w końcu stają się pewnymi całościami, nowymi obiektami. W świecie tym symbol przedstawia – zależnie od sytuacji – pewną procedurę lub odpowiadający jej obiekt.

Między tymi światami jest fundamentalna różnica (mimo niezliczonych więzów między nimi). Na przykład uczeń spostrzega koło jako pewną całość (jako *Gestalt*), istniejącą w otaczającym świecie, a potem stopniowo, w wyniku wieloletniego procesu, tworzy się w jego umyśle pojęcie idealnego koła, obiektu matematycznego. Natomiast liczba 6 nie ma takiego odpowiednika

[6]Nazwy tych światów podane przez Talla nie dadzą się przetłumaczyć na język polski. Pierwszy świat to *conceptual-embodied world*. Słowo „embodied" dosłownie znaczy „wcielony", „ucieleśniony" i ma w języku angielskim pewne znaczenia nie istniejące w polskim. *Embodiment* może znaczyć „giving a body to an abstract idea".

[7]Po polsku informacje na ten temat można znaleźć w (Hiele, 2002).

[8]Tall nazywa go *proceptual-symbolic world*. Słowa „procept" i „proceptual" zostały wymyślone przez Graya i Talla (1994); „procept" to sklejenie części słów „process" i „concept".

w otaczającym świecie, nie powstaje w wyniku percepcji. Tworzy się ona z pewnych schematów tworzących się w umyśle na bazie procesu *liczenia*. Nie jest istotne, czym są liczone obiekty, bowiem istotny jest jedynie proces liczenia w umyśle.

Trzeci ze wspomnianych światów to *formalno-aksjomatyczny świat*, oparty na abstrakcyjnie ujętych własnościach. Nie ważne, czym są rozpatrywane obiekty, istotne jest tylko to, że przyjmujemy – jako założenia – pewne ich własności i drogą dedukcyjną poznajemy inne ich własności.

Możliwość nierównoważnych definicji klarownego pojęcia

Matematyk nieraz ma jakieś pojęcie dobrze ukształtowane i nie potrzebuje myśleć o jego definicji. Staje się ona potrzebna, gdy ujawni się jakiś konflikt pojęciowy. Gdy chodzi o dobrze znane pojęcie, matematyk jest w stanie wymyślić jakąś definicję, pasującą do posiadanego obrazu tego pojęcia. Czasem jednak okazuje się, że nasuwa się kilka sensownych, aczkolwiek nierównoważnych definicji. Zaglądamy do jakiejś autorytatywnej książki, aby stwierdzić, jak inni to ujęli. Bywa, że definicje podane w różnych książkach nie są równoważne, trzeba dokonać wyboru. Jako przykład weźmy pojęcie trójkąta. Dla potrzeb analizy matematycznej odróżnia się starannie trójkąt otwarty od domkniętego. Jak powinno się jednak rozumieć pojęcie trójkąta na poziomie szkolnym?

Pewnym zaskoczeniem może być fakt, że w znanych naukowych monografiach poświęconych podstawom geometrii spotykamy nierównoważne definicje, dające zupełnie różne odpowiedzi na pytanie, czym jest trójkąt.

W książce *Podstawy geometrii*, napisanej przez wybitnych polskich specjalistów K. Borsuka i W. Szmielew (1955), trójkąt jest zdefiniowany jako nieuporządkowana trójka punktów A, B, C nie leżących na jednej prostej. Jest to więc pewna figura 0-wymiarowa T_0.

W słynnej książce Hilberta *Grundlagen der Geometrie* (1903) trójkąt zdefiniowany jest inaczej, jako trójka (domyślnie: nieuporządkowana) odcinków AB, BC, CA, a więc jako obiekt jednowymiarowy T_1.

Obecnie najczęściej podawana jest definicja trójkąta jako figury dwuwymiarowej T_2, będącej częścią wspólną trzech półpłaszczyzn (domkniętych). Te trzy definicje są nierównoważne, charakteryzują odmienne, nawet rozłączne klasy figur; ponadto tylko przy tej trzeciej definicji pole trójkąta jest dwuwymiarową miarą (Jordana) zbioru punktów trójkąta. Choć są to trzy nierównoważne definicje, odpowiadające różnym tworom geometrycznym, każda z nich może być dobrym punktem wyjścia pojęcia trójkąta, a dwa pozostałe elementy trójki T_0, T_1, T_2 można łatwo zdefiniować, wychodząc od którejkolwiek z pozostałych. Bogate pojęcie trójkąt w umyśle ucznia powinno obejmować wszystkie trzy składniki T_0, T_1, T_2.

Wszystkie te trzy definicje mają naturalne źródło w pojęciowo–percepcyjnym świecie. Trzy gwiazdy na niebie tworzące trójkąt i inne podobne sytuacje – to oczywiste źródło intuicji przy pierwszej definicji T_0. Trzy odcinki z drugiej definicji T_1 odpowiadają temu, co uczeń widzi na rysunku w podręczniku szkolnym. Płaska płytka w kształcie trójkąta odpowiada T_2. Warto wspomnieć, że środkiem ciężkości trójkąta rozumianym w sensie fizyki jest ten sam punkt (punkt przecięcia środkowych) w przypadku trójkąta rozumianego w sensie T_0 i T_2, a inny punkt dla figury T_1, jako ramki z drutu (aby sobie to uzmysłowić, wystarczy pomyśleć o nietypowym przypadku trójkąta równoramiennego mającego bardzo długie ramiona i krótką podstawę).

Literatura

[1] Borsuk, K., Szmielew, W.: 1955, *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa.

[2] Dubinsky, E.: 1991, *Reflective abstraction*, w: D. O. Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 95 – 123.

[3] Duda, R.: 1982, *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, Roczniki PTM, Dydaktyka Matematyki 1, s. 127 – 138.

[4] Freudenthal, H.: 1991, *Revisiting Mathematical Education* (China Lectures), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[5] Gray, E.M. i Tall, D.O.: 1994, *Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic*, Journal for Research in Mathematics Education tom 25, no. 2, s. 115 – 141.

[6] Hejny, M.: 1997, *Rozwój wiedzy matematycznej*, Dydaktyka Matematyki 19, s. 15 – 28.

[7] Hilbert, D.: 1903, *Grundlagen der Geometrie*, wyd. II, Teubner, Leipzig.

[8] Juszkiewicz (Youschkevitsch) A. P.: 1976, *The concept of function up to the middle of the* 19*th century*, Archive for History of Exact Sciences 16, s. 37 – 85.

[9] Kieran, C.: 1998, *Models in mathematics education research: a broader view of research results*, w: Sierpińska and Kilpatrick, *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, vol. 1-2, Kluwer, Dordrecht, s. 213 – 225.

[10] Papy, G.: 1971, *A first introduction to the notion of topological space*, Educational Studies in Mathematics 4, s. 18 – 29.

[11] Piaget, J., Garcia, R.: 1989, *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.

[12] Semadeni, Z.: 2005, *O zasadzie właściwego ukierunkowania* (rozwinięcie myśli Zofii Krygowskiej), Roczniki PTM. Dydaktyka Matematyki tom 28, s. 155 – 184.

[13] Sfard, A.: 1991, *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics 22, s. 1 – 36.

[14] Tall, D. O.: 2004, *Introducing three worlds of mathematics*, For the Learning of Mathematics 23, no. 3, s. 29 – 33.

[15] Tall, D. O., Thomas, M., Davis, G., Gray, E.: 2000, *What is the object of the encapsulation of a process*?, Journal of Mathematical Behavior 18, no. 2, no. 1 – 19.

[16] van Hiele, P. M.: 2002, *Podobieństwa i różnice między teorią uczenia się i nauczania Skempa a poziomami myślenia van Hielego*, Dydaktyka Matematyki tom 25, s. 183 – 202.

Autor jest emerytowanym profesorem zwyczajnym
w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego