Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Anna Rybak (Białystok)
Barbara Dudel (Białystok)
István Lénárt (Budapeszt)

Koncepcja włączenia treści z zakresu geometrii sferycznej do kształcenia na poziomie szkoły podstawowej i gimnazjum

Streszczenie

W artykule prezentowana jest koncepcja włączenia elementów geometrii sferycznej do kształcenia matematycznego w polskim systemie edukacyjnym. Prezentowana koncepcja oparta jest na teorii konstruktywizmu, aktywizujących metodach nauczania oraz metodzie porównawczej, czyli jednoczesnym kształceniu w zakresie dwóch systemów geometrycznych. Jednocześnie proponowane jest tworzenie korelacji z innymi przedmiotami szkolnymi.

Wprowadzenie

Podstawa programowa matematyki przewiduje kształcenie z zakresu geometrii na powierzchni płaskiej i w przestrzeni trójwymiarowej, przy czym geometria przestrzenna obejmuje postrzeganie bryły jako całości, z głównym zwróceniem uwagi na jej objętość i pole powierzchni, z pominięciem własności figur, które można skonstruować na jej powierzchni. Tymczasem w swoim otoczeniu dziecko częściej ma kontakt z powierzchniami zakrzywionymi niż z idealną płaszczyzną; wystarczy wspomnieć chociażby powierzchnię sferyczną dobrze znaną dziecku z kontaktu z zabawkami i owocami: na powierzchni piłki można zaobserwować wielokąty, a na powierzchni melona okręgi, co może stanowić dobry punkt wyjścia do odkrywania własności figur na sferze. Wiele sytuacji edukacyjnych organizowanych na poziomie klas I-III stwarza możliwości dostrzegania przez uczniów specyfiki powierzchni zakrzywionej i interpretacji zachodzących tam zależności, w miarę możliwości uczniów. Geometria sferyczna nie wchodzi w zakres nauczania na żadnym etapie edukacyjnym, chociaż uczniowie podczas lekcji geografii poznają globus i proste figury geometryczne skonstruowane na powierzchni sferycznej (np. równoleżniki to przecież okręgi). Nie jest jednak budowana żadna korelacja pomiędzy geografią i matematyką, chociaż nauczanie tych dwóch przedmiotów w korelacji byłoby dla uczniów inspiracją do twórczego myślenia. W artykule zaprezentowana jest koncepcja włączenia wybranych treści z zakresu geometrii sferycznej do realizacji materiału nauczania w klasach młodszych, przedmiotów matematyka i przyroda w szkole podstawowej oraz matematyka i geografia w gimnazjum. Koncepcja ta powstała w oparciu o analizę podstawy programowej trzech szczebli kształcenia wymienionych przedmiotów i zbudowana jest w postaci następujących zestawień:

- przewidziana do nabycia przez ucznia umiejętność z zakresu matematyki;
- skorelowana umiejętność z zakresu przyrody/geografii;
- skorelowana umiejętność z zakresu geometrii sferycznej;
- propozycja (przykład) ćwiczenia umożliwiającego kształcenie rozpatrywanej umiejętności lub ilustracja efektu działalności ucznia w tym zakresie.

Prezentowana koncepcja powstała w oparciu o teorię konstruktywizmu, strategię nauczania czynnościowego oraz metodę porównawczą umożliwiającą jednoczesne poznawanie własności figur geometrycznych na płaszczyźnie i na sferze.

Konstruktywizm

Nadrzędną wartością przyjętą w edukacji jest rozwój ucznia. Zewnętrznym jego przejawem jest coraz lepsze, bogatsze funkcjonowanie młodego człowieka w świecie, radzenie sobie z jego złożonością, między innymi dzięki coraz pełniejszej o nim wiedzy, nabytym umiejętnościom oraz przyjętym postawom. Wspomniana wiedza jest zmienna, tak jak zmienny jest świat, więc nie może być, ze zrozumiałych względów, podana przez nauczyciela „raz na zawsze". Dlatego też nauczyciele powinni kształtować u uczniów umiejętność samodzielnego konstruowania wiedzy – w różnych zakresach i z różnych dziedzin. Coraz większa liczba nauczycieli rozumie to, rozumieją to też prawdopodobnie decydenci oświaty (stąd stosowne zapisy w podstawie programowej), dlatego też coraz większą popularność zdobywa konstruktywistyczne podejście do kształcenia. „Konstruktywizm, który wyrósł na podłożu pragmatyzmu, psychologii kognitywnej, teorii neopiagetowskiej oraz kontynuacji teorii Wygotskiego przyjmuje, że człowiek ciągle konstruuje swoją wiedzę w wyniku nowych doświadczeń zgodnie z zasadami asymilacji i akomodacji" (Klus-Stańska, 2002, s. 91). Jednocześnie konstruktywizm jest najbardziej znaczącym ostatnio trendem w edukacji odnoszonym do dynamicznej relacji między tym jak nauczyciele uczą, a jak uczą się uczniowie (Dylak za: Lunenburg, 1998, s.76).

Nauczyciel konstruktywista inspiruje twórcze myślenie dziecka poprzez stawianie otwartych pytań, które sprzyjają podawaniu kilku poprawnych odpowiedzi, korzystaniu z różnych źródeł informacyjnych, poszukiwaniu, podejmowaniu różnych decyzji przez dziecko. W ten sposób dziecko czuje się bardziej odpowiedzialne za swoją wiedzę. Jak słusznie zauważa Irena Adamek (Adamek I., 1997, s. 33), „nauczyciele mogą pomóc dzieciom aktywnie dochodzić do rozumienia otaczającej rzeczywistości poprzez popieranie dziecięcej zdolności do podejmowania decyzji, usamodzielnianie dzieci oraz wyzwalanie w nich wiary w siebie i sens intelektualnych wysiłków. Istotną rolę w takim podejściu odgrywają pytania twórcze, badawcze, które aktywizują procesy poznawcze dziecka i ułatwiają mu odwołanie się do uprzednich doświadczeń, co sprzyja dojściu drogą rozumowania do nowych wiadomości". Według pedagogiki konstruktywistycznej umiejętność zadawania pytań stanowi podstawę każdego dialogu oraz warunkuje konstruowanie wiedzy przez dziecko. Pojęcia funkcjonujące w naszym umyśle nie są odbiciem poznawanego świata, ale są wypadkową tego świata i społecznych warunków tworzenia i używania znaczeń. Od tych warunków zależy charakter ludzkiej wiedzy (Klus-Stańska, 2010, s. 310). Założenia pedagogiki konstruktywistycznej w kontekście działań pedagogicznych nauczyciela wymagają stworzenia odpowiedniej „przestrzeni edukacyjnej". Ta przestrzeń edukacyjna powinna być wypełniona czynnikami inspirującymi twórcze myślenie, stawianie pytań i ułatwiającymi udzielanie odpowiedzi na postawione (przez nauczyciela bądź uczniów) pytania; prowadzącymi tym samym do konstruowania – przy wykorzystaniu wiedzy już posiadanej – nowej wiedzy. Taki sposób pracy wpisuje się w treść jednej z zasad konstruktywistycznego podejścia do procesu edukacyjnego – budowania realnie ważnego dla ucznia kontekstu motywacyjno-społecznego (Klus-Stańska 2010, s. 312). Własna aktywność dziecka jest postrzegana jako zasadniczy element, wpływający na myślenie dziecka i konstruowanie przez nie „swojego świata matematyki". Powołując się na stanowisko M. Hejny'ego i F. Kuriny, E. Swoboda podaje listę zasad, które opisują ich rozumienie konstruktywistycznego nauczania matematyki:

- matematyka jest rozumiana jako specyficzna ludzka aktywność, a nie jako wynik ludzkiej aktywności;
- podstawowymi elementami aktywności matematycznej jest szukanie związków, rozwiązywanie zadań, tworzenie pojęć, formułowanie twierdzeń, ich uzasadnianie i dowodzenie;
- wiedza jest nieprzenośna, tworzona w myśli człowieka, który stara się coś poznać;
- poznanie opiera się na własnych doświadczeniach poznającego;

- podstawą matematycznego kształcenia jest wytworzenie środowiska umożliwiającego (stymulującego) twórczość;
- procesowi konstruowania wiedzy sprzyjają specjalne interakcje istniejące w klasie;
- bardzo ważne jest wykorzystanie różnych reprezentacji oraz strukturalne budowanie „matematycznego świata;
- istotne znaczenie ma komunikowanie się w klasie oraz stosowanie różnych języków matematyki;
- proces kształcenia powinno się widzieć co najmniej z trzech różnych stanowisk: rozumienia matematyki, „wykształcenie" matematycznego rzemiosła, stosowanie matematyki;
- poznanie, opierające się na reprodukowaniu wiedzy, doprowadza do pseudopoznania, do poznania formalnego (Swoboda 2006, s.24-25).

Nauczanie czynnościowe

Z. Krygowska definiuje nauczanie czynnościowe jako „postępowanie dydaktyczne uwzględniające stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych, wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych" (Krygowska, 1997, str. 127).

Nauczanie to opiera się na dwóch założeniach:

- na wyodrębnieniu z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie;
- działania nauczyciela polegają na świadomym organizowaniu zabiegów dydaktycznych, sprzyjających procesowi kształtowania myślenia matematycznego ucznia jako swobodnego specyficznego działania, jako świadomego posługiwania się przyswojonymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu sytuacji problemowych zapewniających efektywność tego procesu.

Zgodnie z założeniami tej metody, aby rozwój myślenia był prawidłowy, należy stosować odpowiednio dobrane środki dydaktyczne i przy ich pomocy organizować konkretne czynności dziecka.

W procesie interioryzacji powinny wystąpić następujące rodzaje czynności:

- czynności manipulacyjno – ruchowe wykonywane z użyciem rzeczywistych przedmiotów, bliskich otoczeniu dziecka, np.: zabawki odtwarzające sytuacje z doświadczenia lub zadane przez nauczyciela w postaci zabaw;

- czynności manipulacyjno – ruchowe wykonywane za pomocą zastępników, np.: patyczki, liczmany, guziki;
- czynności umowne wykonywane za pomocą środków graficznych np.: drzewka matematyczne, oś liczbowa, tabele, wykresy;
- czynności werbalne wytwarzanie pojęć na skutek dokonywanych przez ucznia samodzielnych doświadczeń i obserwacji, które nie są narzucone przez nauczyciela lub podręcznik.

Można stwierdzić, iż nauczanie czynnościowe bardziej angażuje ucznia i ułatwia opanowanie wiadomości i umiejętności matematycznych oraz rozbudza zainteresowania i kształtuje ich samodzielność. Metoda ta umożliwia dzieciom stawianie pytań, badanie przedstawionych sytuacji, tworzenie różnych rozwiązań i dochodzenie do celu różnymi drogami.

W metodzie czynnościowej realizowane jest podejście konstruktywistyczne, w którym uczeń tworzy swoją wiedzę w integracji z materiałami, różnorodnymi zadaniami na drodze bogatych doświadczeń, pod kierunkiem nauczyciela i we współpracy z kolegami. Mówi o tym obszernie Helena Siwek (2005). Zastosowanie nauczania czynnościowego w edukacji matematycznej daje możliwość realizowania naturalnej drogi rozwoju pojęć matematycznych uczniów. W wyniku czynności konkretnych powinny powstawać reprezentacje enaktywne, w wyniku czynności wyobrażonych – reprezentacje ikoniczne, a w wyniku operacji abstrakcyjnych – reprezentacje symboliczne. Uczeń rozwiązując zadanie powinien wiązać czynności z reprezentacjami (Siwek, 2005, s. 54).

Metoda porównawcza

Termin 'metoda porównawcza' oznacza nauczanie dwóch lub więcej różnych systemów naukowych funkcjonujących w tej samej dziedzinie. W odróżnieniu od przywiązania do jednego ustalonego sposobu myślenia, istota metody porównawczej polega na ciągłym przeciwstawianiu i porównywaniu odpowiadających sobie elementów rozpatrywanych systemów z różnych punktów widzenia. Metoda ta może być łatwo zastosowana w różnych dziedzinach: od historii po ekonomię, od lingwistyki po socjologię, jak również w wielu gałęziach matematyki takich jak algebra, nauka o zbiorach czy systemach liczbowych.

Należy podkreślić, że celem zastosowania metody porównawczej w prezentowanym projekcie jest umożliwienie lepszego zrozumienia przez ucznia treści zawartych w podstawie programowej, nie zaś położenie nacisku na wprowadzenie nowych treści. Budowanie pojęć matematycznych w dwóch systemach jednocześnie, a także ukazanie ich obecności bądź użyteczności w innych dziedzinach, powinno znacząco wpłynąć na rozumienie ich przez ucznia.

Z doświadczeń wynika, że większość uczniowskich uwag i pomysłów wygenerowanych podczas pracy metodą porównawczą jest absolutnie logiczna, odzwierciedlająca sukcesy i porażki pracującego nad nowym problemem umysłu. Co więcej, często uwagi uczniów wskazują drogi, którymi matematyka podążała w przeszłości. Nauczyciel nie powinien umniejszać znaczenia uczniowskich pomysłów, gdyż czasami pomysły, które nie są odpowiednie dla problemów z geometrii euklidesowej na płaszczyźnie, są bardzo cenne, gdy rozważamy problemy z zakresu geometrii nieeuklidesowych.

Przeprowadzono wiele zajęć metodą porównawczą; zarówno z uczniami, jak i ze studentami kształcącymi się na nauczycieli matematyki. Zajęcia te miały miejsce w Polsce, na Węgrzech (Lénárt, 1993; Makara, Lénárt, 2004), w Turcji (Bülent, 2010), w Brazylii (Zionice,2002), w Stanach Zjednoczonych, w Australii i w innych krajach.

Pracę uczniów nad odkrywaniem praw geometrii na sferze, innych niż prawa geometrii na płaszczyźnie (i innych niż spodziewane) niech zilustrują poniższe dwa zdjęcia wykonane podczas zajęć przeprowadzonych w styczniu 2012 roku w klasach integracyjnych PG nr 4 w Białymstoku.

Rys. 1. Dziecko odkryło, że suma kątów w trójkącie na sferze jest większa niż 180°, zupełnie inaczej niż na płaszczyźnie

Rys. 2. Tutaj uczeń próbował narysować kwadrat metodą jak na płaszczyźnie (była to jego własna inicjatywa, nie było polecenia nauczyciela). Odkrył, że nie można tego na sferze zrobić. Był bardzo zdziwiony i poszukiwał przyczyny takiej sytuacji

Podstawa programowa kształcenia ogólnego

W *Podstawie programowej* kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych znajdujemy m.in. następujące zapisy:

„Celem kształcenia ogólnego w szkole podstawowej jest:

1) przyswojenie przez uczniów podstawowego zasobu wiadomości na temat faktów, zasad, teorii i praktyki, dotyczących przede wszystkim tematów i zjawisk bliskich doświadczeniom uczniów;
2) zdobycie przez uczniów umiejętności wykorzystywania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów."

„Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w szkole podstawowej należą: (...)

2) myślenie matematyczne – umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych;
3) myślenie naukowe – umiejętność formułowania wniosków opartych na obserwacjach empirycznych dotyczących przyrody i społeczeństwa; (...);
6) umiejętność uczenia się jako sposób zaspokajania naturalnej ciekawości świata, odkrywania swoich zainteresowań i przygotowania do dalszej edukacji;
7) umiejętność pracy zespołowej."

„W procesie kształcenia ogólnego szkoła podstawowa kształtuje u uczniów postawy sprzyjające ich dalszemu rozwojowi indywidualnemu i społecznemu, takie jak: (...) ciekawość poznawcza, kreatywność, przedsiębiorczość, kultura osobista, gotowość do (...) podejmowania inicjatyw oraz do pracy zespołowej."

Podobne w swojej wymowie zapisy znajdujemy w *Podstawie programowej* kształcenia na III i IV etapie edukacyjnym.

Zapisy te otwierają drogę do kreatywnego podejścia nauczyciela do kształcenia, do budowania korelacji pomiędzy treściami z różnych dziedzin, do stwarzania sytuacji dydaktycznych, w których uczeń w sposób sobie przystępny i atrakcyjny będzie budował wiedzę zarówno z zakresu podstawy programowej, jak też wykraczającą poza nią.

Edukacja wczesnoszkolna – I etap edukacyjny

„Zadaniem szkoły jest: (...) kształtowanie u dziecka pozytywnego stosunku do nauki oraz rozwijanie ciekawości w poznawaniu otaczającego świata i w dążeniu do prawdy."

Zalecane warunki i sposób realizacji treści nauczania opisane w Podstawie programowej wręcz zachęcają do realizacji zajęć w sposób interdyscyplinarny i interaktywny.

W wyniku analizy *Podstawy programowej* edukacji wczesnoszkolnej Autorzy proponują wprowadzenie elementów geometrii sferycznej przy realizacji następujących treści.

Na koniec klasy I szkoły podstawowej:

1. edukacja plastyczna:
   Uczeń:
   - wypowiada się w wybranych technikach plastycznych na płaszczyźnie i w przestrzeni; posługuje się takimi środkami wyrazu plastycznego jak: kształt;
   - ilustruje sceny i sytuacje (realne i fantastyczne) inspirowane wyobraźnią, baśnią, opowiadaniem, muzyką;
   - wykonuje proste rekwizyty (lalka, pacynka itp.).
2. edukacja matematyczna:
   Uczeń:
   - dostrzega symetrię i rysuje drugą połowę figury symetrycznej.

Na koniec klasy III szkoły podstawowej:

1. edukacja plastyczna:
   Uczeń:
   - podejmuje działalność twórczą posługując się takimi środkami wyrazu plastycznego, jak: barwa, kształt, faktura w kompozycji na płaszczyźnie i w przestrzeni (stosując określone materiały, narzędzia i techniki plastyczne).
2. edukacja przyrodnicza:
   Uczeń:
   - wyjaśnia zależność zjawisk przyrody od pór roku;
   - zna wpływ światła słonecznego na cykliczność życia na Ziemi.
3. edukacja matematyczna:
   Uczeń:
   - mierzy i zapisuje wynik pomiaru długości, szerokości... oraz odległości;
   - rozpoznaje i nazywa koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty (również nietypowe, położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie); rysuje odcinki o podanej długości; oblicza obwody trójkątów, kwadratów i prostokątów (w centymetrach);

- rysuje drugą połowę figury symetrycznej; rysuje w powiększeniu i pomniejszeniu, kontynuuje regularność w prostych motywach (np. szlaczki, rozety).

4. zajęcia komputerowe:
   Uczeń:
   - posługuje się wybranymi programami i grami edukacyjnymi, rozwijając swoje zainteresowania;
   - wykonuje rysunki za pomocą wybranego edytora grafiki, np. z gotowych figur.

5. zajęcia praktyczno-techniczne:
   Uczeń:
   - przedstawia pomysły rozwiązań technicznych: planuje czynności, dobiera odpowiednie materiały (papier, drewno, metal, tworzywo sztuczne, materiały włókiennicze) oraz narzędzia;
   - posiada umiejętności: odmierzania odpowiedniej ilości materiału, cięcia papieru i tektury, montażu modeli papierowych i z tworzyw sztucznych, korzystając z prostych instrukcji i schematów rysunkowych, np. buduje latawce, makiety domów, mostów, modele samochodów, samolotów i statków.

Poniżej w tabelach przedstawiona jest propozycja budowania korelacji pomiędzy treściami z poszczególnych obszarów i z zakresu geometrii sferycznej, a także przykładowe ćwiczenia, wspomagające osiągnięcie zamierzonych celów.

Klasa I

Tabela 1. Zestawienie korelacji między rodzajami edukacji w klasie I

Edukacja plastyczna	Edukacja matematyczna	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń podejmuje działalność twórczą posługując się takimi środkami wyrazu plastycznego, jak: barwa, kształt, faktura w kompozycji na płaszczyźnie i w przestrzeni (stosując określone materiały, narzędzia i techniki plastyczne); ilustruje sceny i sytuacje (realne i fantastyczne) inspirowane wyobraźnią, baśnią, opowiadaniem, muzyką.	Uczeń dostrzega symetrię i rysuje drugą połowę figury symetrycznej.	Uczeń realizuje twórczość plastyczną na powierzchniach o róż nych krzywiznach, wykonuje rysunki odręczne m.in. na powierzchniach piłek, balonów i modeli z zestawu Sfera Lenarta, Nauczyciel: obserwuje rysunki Ucznia, ich tematykę, zwraca uwagę na powtarzalność i regularność motywów.	 Rys. 3. Odręczne rusunki dzieci

Klasy II–III

Tabela 2. Zestawienie korelacji między edukacją plastyczną i geometrią sferyczną w klasach II i III

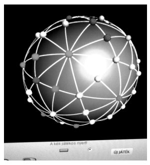
Edukacja plastyczna	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń podejmuje działalność twórczą posługując się takimi środkami wyrazu plastycznego, jak: barwa, kształt, faktura w kompozycji na płaszczyźnie i w przestrzeni (stosując określone materiały, narzędzia i techniki plastyczne).	Uczeń realizuje twórczość plastyczną na powierzchniach o różnych krzywiznach, wykonuje rysunki odręczne m.in. na powierzchniach piłek, balonów i modeli z zestawu Sfera Lenarta. Nauczyciel: obserwuje rysunki Ucznia, ich tematykę, zwraca uwagę na powtarzalność i regularność motywów.	Planujemy z dziećmi przygotowanie wieczorku dla babci i dziadka – pada propozycja zorganizowania "Imprezy na okrągło". Mamy przygotować dekorację z wykorzystaniem okrągłych przedmiotów – balony, piłki, piłeczki. Rysujemy, malujemy i wyklejamy na nich różne sceny z naszego klasowego życia. Planujemy pracę w grupach: Grupa 1. Ma do dyspozycji piłki, balony, piłeczki ping-pongowe, kolorowy papier, klej, nożyczki, linijki, kolorowe nitki. Grupa 2. Ma do dyspozycji piłki, balony, piłeczki ping-pongowe, mazaki, farby. Grupa 3. Ma do dyspozycji okrągłe owoce – jabłka, pomarańcze, mandarynki, gumki recepturki, wykałaczki. Staramy się wykonać piękne prace – dekorację naszej imprezy.

Na jakie trudności napotykamy (napotykają dzieci) wykonując swoje prace:

- rysując linie proste na piłce, balonie otrzymujemy krzywe linie;
- rysując figury na okrągłych przedmiotach uzyskujemy nierówne boki;
- jak odmierzyć prostopadłe boki na piłce;
- jak odmierzyć odległości, aby było równo;
- nie przykleja się w całości wycięty obrazek;
- jak podzielić zaokrągloną powierzchnię na równe części;
- czy można kreślić figury na takich okrągłych powierzchniach?
- na czym polega różnica w rysowaniu figur na kartce papieru/powierzchni płaskiej, a na balonie/powierzchni zakrzywionej?

Trudności, jakie dzieci napotkały, są ich pierwszymi odkryciami dokonanymi podczas praktycznego poznawania geometrii na powierzchni zakrzywionej. Jest to dobry punkt wyjścia do dalszej pracy badawczej dziecka, które – powodowane bardzo żywą, w tym wieku, ciekawością poznawczą – będzie dążyło do pokonania napotkanych trudności. Z kolei te rozwiązania zaowocują odkryciami z zakresu matematyki; dziecko odkryje dlaczego wycięty z kartki obrazek nie może być przyklejony bez zniekształcenia na powierzchni balonu, ale też wykształci intuicję mierzenia odległości na powierzchni zakrzywionej. I tutaj jest już dobre miejsce na skorelowanie edukacji matematycznej z geometrią sferyczną.

Tabela 3. Zestawienie korelacji między edukacją matematyczną i geometrią sferyczną w klasach II i III

Edukacja matematyczna	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń mierzy i zapisuje wynik pomiaru długości, szerokości oraz odległości.	Uczeń podejmuje próbę odpowiedzi na pytanie: jak mierzyć odległości między punktami na powierzchni zakrzywionej? Wykonuje przy tym eksperymenty posługując się przedmiotami o kulistym kształcie.	Praca w grupach 4-osobowych: dzieci mają do zaplanowania podróż dookoła świata. Do dyspozycji mają globus, kartkę papieru, zestaw Sfera Lenarta, sznurki, tasiemkę, linijkę, ekierkę. Każda grupa otrzymuje inną trasę podróży. Dokonujemy obliczeń uwzględniając możliwości lokomocyjne człowieka i jego środków lokomocji – do uzgodnienia. Poszukiwanie sposobów dokonywania pomiaru długości i narzędzi, które można wykorzystać do tego celu. Próby narysowania trasy na kartce papieru. Co można zilustrować? Jakimi narzędziami możemy wówczas się posługiwać?
Rysuje odcinki o podanej długości.	Podejmuje próbę odpowiedzi na pytanie: czy na powierzchni zakrzywionej można narysować odcinek? Obiera pomarańczę. Gra w grę komputerową „pięć w linii prostej", znajduje „odcinki" na planszy gry.	 Rys. 4. Ekran gry komputerowej
Rozpoznaje i nazywa koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty (również nietypowe, położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie).	Ogląda ozdobione przedmioty o kształcie kulistym lub elipsoidalnym (np. kule Temari lub pisanki), nazywa figury geometryczne stanowiące motywy zdobienia, porównuje je z figurami geometrycznymi na płaszczyźnie.	 Rys. 5. Kule Temari
Oblicza obwody trójkątów, kwadratów i prostokątów (w centymetrach).	Podejmuje próbę odpowiedzi na pytanie: jak obliczyć obwód figury narysowanej na powierzchni zakrzywionej?	Budujemy nowoczesne osiedle – okrągłe domy. Praca architekta – projektowanie nowych koncepcji wyliczanie ile materiału trzeba na ramy okienne różnych kształtów, drzwi. Dokonywanie obliczeń zaprojektowanych na powierzchni płaskiej kształtów i wykonanie makiety zgodnie z tymi projektami; wykorzystanie obliczeń. Jakie są problemy z realizacją pomysłów?

Rysuje drugą połowę figury symetrycznej; rysuje w powiększeniu i pomniejszeniu, kontynuuje regularność w prostych motywach (np. szlaczki, rozety).	Realizuje twórczość plastyczną na powierzchniach o różnych krzywiznach, wykonuje rysunki odręczne m.in. na powierzchniach piłek, balonów i modeli z zestawu Sfera Lenarta, Nauczyciel: obserwuje rysunki Ucznia, ich tematykę, zwraca uwagę na powtarzalność i regularność motywów.	 Rys. 6. Dziecko ilustruje symetrię w rysunku odręcznym

Tabela 4. Zestawienie korelacji między edukacją przyrodniczą i geometrią sferyczną w klasach II i III

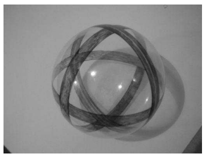
Edukacja przyrodnicza	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń wyjaśnia zależność zjawisk przyrody od pór roku, zna wpływ światła słonecznego na cykliczność życia na Ziemi.	Uczeń ilustruje cykliczność zmian pór roku posługując się modelem z zestawu Sfera Lenarta, wykonuje w odpowiednich częściach modelu rysunki obrazujące zjawiska przyrody właściwe dla danej pory roku, symuluje ruch obrotowy Ziemi, posługując się ustalonym źródłem światła i ruchomym modelem Ziemi.	Przygotuj sferę do gry: skonstruuj na niej trzy wzajemnie prostopadłe okręgi wielkie, czyli trzy wzajemnie prostopadłe sferyczne proste. Po wykonaniu konstrukcji Twoja sfera może wyglądać na przykład tak:  Rys. 7. Podział sfery prostymi sferycznymi Przyjmij jedną z części, na które podzieliłeś sferę, za naszą część świata. Jaka jest u nas teraz pora roku? Narysuj w tej części rysunek obrazujący tę porę roku. Jakie są pory roku w pozostałych częściach świata? Zilustruj je.

Tabela 5. Zestawienie korelacji między zajęciami komputerowymi i geometrią sferyczną w klasach II i III

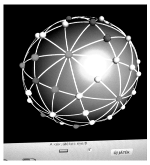
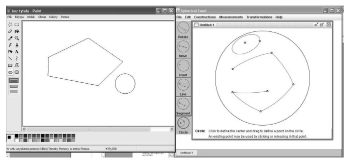
Zajęcia komputerowe	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń posługuje się wybranymi programami i grami edukacyjnymi, rozwijając swoje zainteresowania.	Uczeń gra w grę komputerową „pięć w linii prostej” kształtując pojęcie linii prostej na powierzchni sferycznej.	Gra dostępna pod adresem www.lenartsphere.com polega na tym, że wygrywa gracz, który pierwszy zaznaczy pięć kolejnych punktów leżących na tej samej sferycznej prostej. Można grać z komputerem lub z kolegą.  Rys. 8. Ekran gry komputerowej
Wykonuje rysunki za pomocą wybranego edytora grafiki, np. z gotowych figur.	Rysuje figury geometryczne na powierzchni kuli posługując się apletem Easel programu Geogebra, porównuje te figury z narysowanymi na płaszczyźnie np. przy pomocy edytora Paint.	 Rys. 9. Figury geometryczne na płaszczyźnie i na sferze rysowane w programach Paint i Spherical Easel

Tabela 6. Zestawienie korelacji między zajęciami praktyczno-technicznymi i geometrią sferyczną w klasach II i III

Zajęcia praktyczno-techniczne	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń przedstawia pomysły rozwiązań technicznych: planuje czynności, dobiera odpowiednie materiały (papier, drewno, metal, tworzywo sztuczne, materiały włókiennicze) oraz narzędzia.	Uczeń planuje wykonanie ozdób choinkowych lub wielkanocnych, wymagających czynności technicznych na powierzchniach kulistych lub elipsoidalnych (np. bombki choinkowe, pisanki).	 Rys. 10. Dekoracja na sferze
Posiada umiejętności: odmierzania odpowiedniej ilości materiału, cięcia papieru i tektury.	Wycina z papieru ozdoby i nalepia je na powierzchnie zdobione; obserwuje i omawia zniekształcenia, jakim podlegają kształty płaskie, gdy ”dopasowujemy” je do powierzchni zakrzywionej.	

Klasy IV–VI

W wyniku analizy *Podstawy programowej* dla klas IV–VI Autorzy proponują wprowadzenie elementów geometrii sferycznej przy realizacji następujących treści.

W zakresie treści przedmiotu *Przyroda*:

11. Ziemia we Wszechświecie.

    Uczeń:

    1. opisuje kształt Ziemi z wykorzystaniem jej modelu – globusa;
    2. wymienia nazwy planet Układu Słonecznego i porządkuje je według odległości od Słońca;
    3. wyjaśnia założenia teorii heliocentrycznej Mikołaja Kopernika;
    4. bada doświadczalnie prostoliniowe rozchodzenie się światła i jego konsekwencje, np. camera obscura, cień;
    5. bada zjawisko odbicia światła: od zwierciadeł, powierzchni rozpraszających, elementów odblaskowych; podaje przykłady stosowania elementów odblaskowych dla bezpieczeństwa;
    6. prezentuje za pomocą modelu ruch obiegowy i obrotowy Ziemi;
    7. odnajduje zależność między ruchem obrotowym Ziemi a zmianą dnia i nocy;
    8. wykazuje zależność między ruchem obiegowym Ziemi a zmianami pór roku.

12. Lądy i oceany.

    Uczeń:

    1. wskazuje na globusie: bieguny, równik, południk zerowy i 180°, półkule, kierunki główne oraz lokalizuje kontynenty, oceany i określa ich położenie względem równika i południka zerowego;
    2. wskazuje na mapie świata: kontynenty, oceany, równik, południk zerowy i 180°, bieguny;
    3. charakteryzuje wybrane organizmy oceanu, opisując ich przystosowania w budowie zewnętrznej do życia na różnej głębokości;
    4. opisuje przebieg największych wypraw odkrywczych, w szczególności Krzysztofa Kolumba i Ferdynanda Magellana.

W zakresie treści przedmiotu *Matematyka*.

7. Proste i odcinki.

   Uczeń:

   7. rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek;
   8. rozpoznaje odcinki i proste prostopadłe i równoległe;
   9. rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych;
   10. mierzy długość odcinka z dokładnością do 1 milimetra;
   11. wie, że aby znaleźć odległość punktu od prostej, należy znaleźć długość odpowiedniego odcinka prostopadłego.

8. Kąty.

   Uczeń:

   1. wskazuje w kątach ramiona i wierzchołek;
   2. mierzy kąty mniejsze od 180 stopni z dokładnością do 1 stopnia;
   3. rysuje kąt o mierze mniejszej niż 180 stopni;
   4. rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty;
   5. porównuje kąty;
   6. rozpoznaje kąty wierzchołkowe i kąty przyległe oraz korzysta z ich własności.

9. Wielokąty, koła, okręgi.

   Uczeń:

   1. rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne;
   2. konstruuje trójkąt o trzech danych bokach; ustala możliwość zbudowania trójkąta (na podstawie nierówności trójkąta);
   3. stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta;
   4. rozpoznaje i nazywa kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez;
   5. zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu;
   6. wskazuje na rysunku, a także rysuje cięciwę, średnicę, promień koła i okręgu.

10. Bryły.

    Uczeń:
    1. rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył;
    2. wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościany i sześciany i uzasadnia swój wybór;
    3. rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów;
    4. rysuje siatki prostopadłościanów.

11 Obliczenia w geometrii.

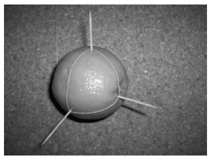
    Uczeń:
    1. oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków;
    2. oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych;
    3. stosuje jednostki pola: m^2, cm^2, km^2, mm^2, dm^2, ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);
    4. oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;
    5. stosuje jednostki objętości i pojemności: litr, mililitr, dm^3, m^3, cm^3, mm^3;
    6. oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.

Poniżej w tabelach przedstawiona jest propozycja budowania korelacji pomiędzy treściami z poszczególnych przedmiotów i z zakresu geometrii sferycznej, a także przykładowe ćwiczenia, wspomagające osiągnięcie zamierzonych celów.

Tabela 7. Zestawienie korelacji między matematyką, przyrodą i geometrią sferyczną w klasach IV–VI

Matematyka	Przyroda	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek.	Uczeń wskazuje na globusie: bieguny, równik, południk zerowy i 180°, opisuje przebieg największych wypraw odkrywczych, w szczególności Krzysztofa Kolumba i Ferdynanda Magellana.	Uczeń rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek na sferze; dyskutuje kwestię sferycznej prostej.	

Rozpoznaje odcinki i proste prostopadłe oraz równoległe; rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych.	Wskazuje na globusie: bieguny, równik, południk zerowy i 180°.	Rozpoznaje odcinki i proste prostopadłe; rysuje pary odcinków prostopadłych; bada problem równoległości na sferze, wyciąga wniosek o nieistnieniu prostych i odcinków równoległych na sferze.	Proste równoległe na płaszczyźnie charakteryzują się tym, że możemy określić ich odległość od siebie. Narysuj okrąg wielki na sferze i figurę położoną w stałej odległości od tego okręgu. Opisz figurę, którą otrzymałeś. Czy ta figura może być uznana za prostą sferyczną?
Mierzy długość odcinka.	Opisuje przebieg największych wypraw odkrywczych, w szczególności Krzysztofa Kolumba i Ferdynanda Magellana.	Mierzy odległości punktów na sferze, rozważa kwestię jednostek, w jakich można mierzyć odległości na sferze.	W starożytności Babilończycy stwierdzili, że wygodnie jest przyjąć 1/360 część okręgu wielkiego za sferyczną jednostkę długości (poszukaj w różnych źródłach odpowiedzi na pytanie: dlaczego?). Jest to dobrze nam znany 1 stopień. Tak więc możesz użyć linijki sferycznej i mierzyć odległości na sferze w stopniach. Opisz parę takich punktów na sferze, że odległość między nimi można mierzyć wzdłuż więcej niż jednego łuku. Czy na płaszczyźnie istnieją dwa punkty takie, że odległość między nimi można mierzyć wzdłuż więcej niż jednego odcinka? Jaka jest najmniejsza odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie? Jaka jest najmniejsza odległość między dwoma punktami na sferze?
Rysuje kąt o mierze mniejszej niż 180 stopni; mierzy kąty mniejsze od 180 stopni z dokładnością do 1 stopnia; porównuje kąty.	Wskazuje na globusie kierunki główne.	Konstruuje, mierzy i porównuje kąty na sferze.	Popatrz na poniższe zdjęcie:  Rys. 11. Globus wykonany przez ucznia Przedstawia ono bardzo uproszczony globus sporządzony samodzielnie przez gimnazjalistę. Jakie ważne elementy globusa tutaj dostrzegasz? Jakie kąty dostrzegasz? Na zdjęciu widzisz też zaznaczone w przybliżeniu położenie Krakowa i Londynu. Pod jakim kątem najkrótsza linia łącząca punkty reprezentujące te miasta przecina równik?

Rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne.		Konstruuje różne trójkąty na sferze; bada kwestię miar kątów wewnętrznych w trójkącie sferycznym; wyciąga wnioski.	 Rys. 12. Na pomarańczy łatwo jest pokazać trójkąt, który nie istnieje na płaszczyźnie
Stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta.		Bada problem sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta sferycznego, formułuje hipotezę.	
Rozpoznaje i nazywa kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez; zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu.		Bada możliwość konstruowania kwadratów, prostokątów, rombów, równoległoboków, trapezów na sferze; formułuje wnioski; odkrywa na sferze dwukąt – figurę geometryczną, która nie istnieje na płaszczyźnie.	Zaznacz na sferze punkt i skonstruuj zaczynające się w tym punkcie dowolne łuki dwóch różnych okręgów wielkich. Przedłuż skonstruowane łuki. Czy „spotkają się” one ponownie w jakimś punkcie? Dwa łuki o wspólnym początku dzielą sferę na dwie części. Opisz „kształty” i „rozmiary” tych części. Jak, Twoim zdaniem, można zdefiniować wielokąt na sferze? Czy któraś z części, na które skonstruowane łuki podzieliły sferę, jest wielokątem?
Wskazuje na rysunku, a także rysuje cięciwę, średnicę, promień koła i okręgu.		Konstruuje okręgi na sferze, rysuje cięciwę, średnicę, promień okręgu sferycznego, dyskutuje liczbę środków okręgu sferycznego.	Skonstruuj na sferze. Użyj cyrkla sferycznego i narysuj okrąg o środku w punkcie P i dowolnym promieniu. Użyj linijki sferycznej i narysuj promień, średnicę, cięciwę okręgu oraz styczną do okręgu. Wyznacz punkt biegunowy do punktu P i nazwij go P’. Narysuj okręgi o środku w punkcie P i promieniach $30°$, $60°$, $90°$. Zbadaj Czy punkt P’ jest środkiem okręgu, który narysowałeś jako pierwszy? Jak to sprawdzić? Uzasadnij swoją odpowiedź. Jeśli na poprzednie pytanie odpowiedziałeś „tak”, zastanów się, co możesz powiedzieć o promieniu okręgu. Cyrkiel sferyczny pozwala rysować okręgi o promieniach nie większych od $90°$. Jak narysować okrąg o promieniu $120°$? Czy możesz rysować na sferze okręgi koncentryczne o coraz większych promieniach? Czy możesz w nieskończoność zwiększać promień okręgu? Czy okręgi o coraz większych promieniach są coraz większe?

Rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył.	Opisuje kształt Ziemi z wykorzystaniem jej modelu – globusa; prezentuje za pomocą modelu ruch obiegowy i obrotowy Ziemi.	Rozważa, jak można wykorzystać przedmioty z otoczenia o kulistym kształcie do badania własności figur na sferze; wykonuje proste eksperymenty geometryczna na owocach, piłeczkach, balonach itp.	
Oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków; oblicza pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku (w tym na własnym rysunku pomocniczym) oraz w sytuacjach praktycznych.	Lokalizuje kontynenty, oceany.	Szacuje powierzchnie figur na sferze, używając globusa (powierzchnie wysp, kontynentów itp); rozważa, jak można obliczać pola figur na sferze.	Weź globus i, obserwując go, spróbuj odpowiedzieć na pytania: Który obszar jest większy: Grenlandii czy Ameryki Południowej? Kanady czy Australii? Jaki jest stosunek powierzchni oceanów do powierzchni lądów? Szelf kontynentalny to obszar wokół kontynentów oznaczony na mapach i globusach jasnoniebieskim kolorem. Morza i oceany są tam stosunkowo płytkie i stanowią środowisko naturalne wielu gatunków roślin i zwierząt. Jak przypuszczasz, jaki jest stosunek powierzchni szelfu kontynentalnego do powierzchni lądów? Jaki jest stosunek powierzchni pustyń (oznaczonych na globusie kolorem żółtym) do powierzchni wszystkich lądów? Do powierzchni obszarów pokrytych lodem (oznaczonych na globusie kolorem białym)?

Gimnazjum

W wyniku analizy *Podstawy programowej* dla gimnazjum Autorzy proponują wprowadzenie elementów geometrii sferycznej przy realizacji następujących treści.

W zakresie treści przedmiotu *Geografia*.

3. Kształt, ruchy Ziemi i ich następstwa.

   Uczeń:

   1. podaje główne cechy kształtu i wymiarów Ziemi; odczytuje współrzędne geograficzne na globusie;
   2. posługuje się zezrozumieniem pojęciami: ruch obrotowy Ziemi, czas słoneczny, czas strefowy; podaje cechy ruchu obrotowego; wyjaśnia, dlaczego zostały wprowadzone strefy czasowe i granica zmiany daty; posługuje się mapą stref czasowych do określania różnicy czasu strefowego i słonecznego na Ziemi.

W zakresie treści przedmiotu *Matematyka*.

12. Figury płaskie.

    Uczeń:

    7. stosuje twierdzenie Pitagorasa;
    8. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
    9. oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
    14. stosuje cechy przystawania trójkątów;
    21. konstruuje okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;
    22. rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

13. Bryły.

    Uczeń:

    2. oblicza pole powierzchni (...) kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Należy zauważyć, że przystępując do nauki w gimnazjum uczeń zna już podstawowe pojęcia z zakresu geometrii, natomiast w trakcie tej nauki posługuje się nimi w bardziej złożonych sytuacjach. Podobnie rzecz ma się z treściami z zakresu geografii; w niewielu miejscach można budować korelację z matematyką, w tym geometrią sferyczną. Znakomita większość tych możliwości przypada na szkołę podstawową. Dlatego też w poniżej przedstawionych tabelach nie widać prób budowania korelacji pomiędzy matematyką i geografią (aczkolwiek w ćwiczeniach z geografii trzeba wykonywać obliczenia, więc korelacji nie da się uniknąć!), zaś w zakresie matematyki ujęto tylko niektóre z haseł programowych, przy realizacji których można stosować metodę porównawczą. Praktycznie we wszystkich treściach z zakresu geometrii (na płaszczyźnie i w przestrzeni) w gimnazjum można tę metodę stosować; w przypadku haseł nie ujętych w tabeli inwencję pozostawiono nauczycielom.

Tabela 8. Zestawienie korelacji między geografią i geometrią sferyczną w gimnazjum

Geografia	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń podaje główne cechy kształtu i wymiarów Ziemi; odczytuje współrzędne geograficzne na globusie.	Uczeń używa modelu sfery do stworzenia własnego globusa, a następnie rozwiązuje problemy posługując się nim.	Wykonaj swój globus: • połącz ze sobą dwie przezroczyste półkule za pomocą pierścienia, • wzdłuż linii złączenia obu półkul narysuj równik i podpisz go, • w najwyższych punktach obu półkul zaznacz kropkami biegun północny i biegun południowy (dla ułatwienia najwyższe punkty zaznaczone są dziurkami), • stawiając nóżkę cyrkla sferycznego na biegunie północnym narysuj okręgi o środku w biegunie północnym i promieniach 30° i 60°. Narysuj okręgi o takich samych promieniach i środku w biegunie południowym. Otrzymałeś w ten sposób kilka równoleżników, • korzystając z linijki sferycznej zaznacz na równiku łuki co 30° Przez każdy zaznaczony na równiku punkt poprowadź łuk okręgu wielkiego łącząc ze sobą oba bieguny. Otrzymałeś w ten sposób sieć południków, • o znacz południki, podpisując je wzdłuż równika co 30° od południka 0° (Greenwich) do 180° w prawo i ponownie od 0° do 180° w lewo, • południk 0° i 180? oraz równik pociągnij dla odróżnienia innym kolorem. Południk 180? to linia zmiany daty, • oznacz równoleżniki, podpisując je wzdłuż południka 0° (Greenwich) co 30°, zaczynając od równika, a kończąc na biegunach, • narysuj linią przerywaną okrąg o środku w biegunie północnym i promieniu 23,5°. Nazwij go kołem podbiegunowym północnym. Podobnie wyznacz koło podbiegunowe południowe. Podpisz na modelu oba koła, • narysuj linią przerywaną okrąg o środku w biegunie północnym i promieniu 66,5°. Nazwij go zwrotnikiem Raka. Podobnie wyznacz zwrotnik Koziorożca. Podpisz na modelu oba zwrotniki. Zbadaj. • Zaznacz w układzie współrzędnych na kuli punkt odpowiadający położeniu Twojej miejscowości (potrzebne dane, czyli długość i szerokość geograficzną znajdziesz w atlasie). Posługując się linijką sferyczną zmierz odległość tego punktu w linii prostej od bieguna północnego. Pamiętając, że obwód Ziemi wynosi ok. 40 000 km, przelicz odległość w stopniach na kilometry. • Jeśli dwa punkty kuli ziemskiej leżą na tym samym równoleżniku, ale nie na równiku, to czy najkrótszą drogą między nimi jest łuk równoleżnika? Zbadaj ten problem. Posługując się globusem, który wykonałeś, zaznacz kropką miejscowości leżące na tym samym równoleżniku (przykładem mogą być Warszawa i Irkuck). Narysuj i zmierz przy pomocy linijki sferycznej najkrótszą odległość między nimi. Czy narysowana linia jest równoległa do równika? • Na Księżycu można określić system współrzędnych geograficznych podobnie jak na kuli ziemskiej. Położenie krateru Archimedes określa się w przybliżeniu jako 0° długości geograficznej i 30° szerokości geograficznej północnej, zaś krateru Ptolemeusz jako 0° długości geograficznej i 30° szerokości geograficznej południowej. Jaka jest odległość między nimi w stopniach i w kilometrach? (długość równika księżycowego jest równa około 11 000 km).

Posługuje się ze zrozumieniem pojęciami: ruch obrotowy Ziemi, czas słoneczny, czas strefowy; podaje cechy ruchu obrotowego; wyjaśnia, dlaczego zostały wprowadzone strefy czasowe i granica zmiany daty; posługuje się mapą stref czasowych do określania różnicy czasu strefowego i słonecznego na Ziemi.	Używa modelu sfery do ilustracji stref czasowych na Ziemi.	Przygotuj globus do wyznaczania czasu: • narysuj na swoim globusie równik i południk zerowy, • umieść linijkę sferyczną tak, aby południk zerowy przechodził dokładnie pomiędzy dwoma punktami odległymi od siebie o 5°. Podziel równik na łuki długości 15°, zaczynając od punktu położonego 7,5° na prawo od południka zerowego. Przez każdy zaznaczony na równiku punkt poprowadź łuk okręgu wielkiego łączący oba bieguny, • oznacz łuk „otaczający” południk zerowy jako 0h, łuki położone na wschód od południka zerowego jako +1h, +2h, ... , +11h oraz +12h, zaś łuki położone na zachód od południka zerowego jako -1h, -2h, ... , -11h, • zaznacz linię zmiany daty. Jak myślisz? Dlaczego strefy czasowe mają szerokość 15°? Jak możesz użyć opisów łuków do znalezienia różnicy czasu pomiędzy dowolnymi dwoma miejscami na kuli ziemskiej? Zbadaj • Która godzina jest teraz w Twojej miejscowości? Gdzie na świecie ludzie w tej chwili śpią? Gdzie jedzą śniadanie? • Która godzina jest w Twojej miejscowości, gdy w Waszyngtonie jest południe? Gdy w Bangkoku jest południe? • Czy możliwe jest, że samolot wyleci z Hongkongu w czwartek i przyleci do San Francisco w środę? • Co dzieje się z datą i czasem, gdy przekraczasz linię zmiany daty? • Wyjaśnij, dlaczego linia zmiany daty jest konieczna.

Tabela 9. Zestawienie korelacji między matematyką i geometrią sferyczną w gimnazjum

Matematyka	Geometria sferyczna	Przykład ćwiczenia lub ilustracja rezultatów działalności uczniów
Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa.	Uczeń stawia hipotezy dotyczące związków pomiędzy bokami w sferycznym trójkącie prostokątnym; podejmuje próby weryfikacji tych hipotez.	Jak myślisz, czy twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe na sferze?
Korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach.	Bada czworokąty na sferze, rozważając uprzednio problem równoległości na sferze.	Skonstruuj na sferze • Skonstruuj czworokąt, który posiada wszystkie własności, jakie posiada kwadrat na płaszczyźnie. Pamiętaj, że wierzchołki czworokąta powinny być połączone łukami, które są krótszymi fragmentami okręgów wielkich. Opisz swój sposób konstrukcji. • Skonstruuj drugi taki czworokąt, o większych rozmiarach od poprzedniego.

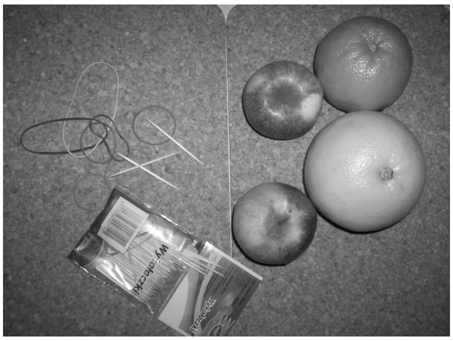
		Zbadaj • Czy przeciwległe boki skonstruowanego czworokąta są równoległe? Uzasadnij swoją odpowiedź. • Zmierz kąty skonstruowanego czworokąta. Czy wszystkie kąty są proste? Czy mogą być proste? Odpowiedź uzasadnij. • Zmierz kąty obu skonstruowanych czworokątów. Czy odpowiednie kąty w obu czworokątach są równe? • Zmierz przekątne skonstruowanych czworokątów i kąty, pod jakimi przekątne przecinają się w każdym czworokącie. Na jakie części dzieli każdą z przekątnych punkt ich przecięcia?
Stosuje cechy przystawania trójkątów.	Bada cechy przystawania trójkątów sferycznych.	Czy miary trzech kątów określają jednoznacznie tylko jeden trójkąt na płaszczyźnie? A na sferze?
Oblicza pole powierzchni (...) kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).	Szacuje powierzchnie figur na sferze, używając globusa (powierzchnie wysp, kontynentów itp); rozważa, jak można obliczać pola figur na sferze.	Proponujemy powtórzyć ostatnie ćwiczenie ujęte w tabeli dla klas IV–VI; doświadczenie pokazuje, że szacowania nigdy dość.

Jak to praktycznie zrealizować?

Środki dydaktyczne

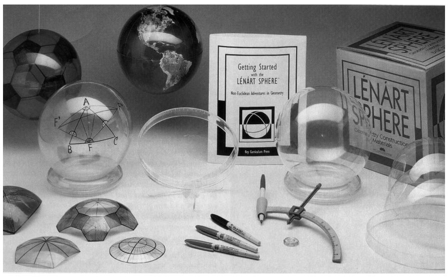
W zasadzie lista środków dydaktycznych wspomagających realizację wyżej zaprezentowanej koncepcji jest zależna od inwencji nauczyciela i uczniów. Autorzy proponują następujące pomoce dla zapoczątkowania „kolekcji”:

- pomoce „naturalne”:



Rys. 13. Owoce jako pomoce naukowe

- zestaw modeli i przyrządów Sfera Lenarta:



Rys. 14. Zestaw Sfera Lenarta.
Źródło: za pozwoleniem Key Curriculum Press

- programy komputerowe:
  • gra komputerowa „five-in-a-line”, której polskojęzyczna wersja językowa dostępna jest w Internecie pod adresem www.lenartsphere.com
  • aplet Spherical Easel programu Geogebra, dostęp pod adresem http://merganser.math.gvsu.edu/easel/
- globusy – różnego rodzaju i różnej wielkości;
- kule temari, bombki choinkowe, balony, piłeczki itp.;
- wszelkie zdjęcia i ilustracje pokazujące elementy geometrii nieeuklidesowych w naturze i efektach działalności człowieka (sztuce, przedmiotach użytkowych itp.).

Należy podkreślić, że dla przeprowadzenia pełnego eksperymentu należy umożliwić uczniom pracę z zestawem modeli i przyrządów Sfera Lenarta, gdyż tylko wtedy możliwe będzie precyzyjne konstruowanie figur geometrycznych oraz wykonywanie pomiarów na sferze.

Miejsce

Wydaje się, że dobrze będzie, jeśli wspomniane pomoce dydaktyczne na stałe zagoszczą w sali lekcyjnej. Dlatego też proponujemy urządzenie „kącika interdyscyplinarnego” w pracowni, gdzie na stoliku będą wyeksponowane jak najbardziej różnorodne rekwizyty, natomiast fragment gazetki ściennej będzie miejscem, gdzie można wywieszać ilustracje, problemy do zastanowienia, eksponować graficznie przedstawione wyniki pracy uczniowskiej itp. Takie rozwiązanie ułatwia zastosowanie metody porównawczej w dowolnym momencie lekcji. Oczywiście, plastikowe modele z zestawu Sfera Lenarta, przeznaczone do pracy badawczej uczniów prowadzonej w grupach, umieszczone będą w miejscu odpowiednio do tego przystosowanym.

Propozycja organizacji zajęć

Zajęcia z wykorzystaniem metody porównawczej mogą być organizowane w dwóch formach:

- w formie pracy zbiorowej, gdzie może być wykorzystana prezentacja poszczególnych rekwizytów, a odpowiednio sformułowane przez nauczyciela pytania staną się inspiracją do dyskusji.

  Przykład.

  Pokazując piłkę nożną można zadać pytania:
  • Czy można zauważyć tutaj figury geometryczne? Jeśli tak, to jakie? Jak je nazwiemy? Czym są ich elementy? Czy te figury przypominają figury skonstruowane na płaszczyźnie? Co jest podobne? Co jest różne?
  • Piłka może „krążyć" wśród uczniów (a może kilka różnych piłek?). Ważne jest, aby uczniowie wypowiadali się publicznie, mówili o swoich spostrzeżeniach bez obawy, że zostaną zganieni. Temat jest dla nich nowy, a oni czynią właśnie pierwsze kroki w konstruowaniu nowej wiedzy.

- w formie pracy grupowej (lub indywidualnej, jeśli ilość pomocy dydaktycznych na to pozwala), gdzie uczniowie wykonują konstrukcje na płaszczyźnie i na sferze zmierzając do rozwiązania problemu. Następnie jest prezentacja wyników pracy i dyskusja podsumowująca połączona z ustaleniem wniosków.Dobrym przykładem jest tutaj badanie sumy kątów wewnętrznych w trójkącie sferycznym.

Podsumowanie

Prezentowana propozycja wpisuje się w hasło, które przyświeca pracy szkół w rozpoczynającym się właśnie roku szkolnym: Rok Szkoły z Pasją. Wzbogaca ona ofertę edukacyjną szkoły, której realizacja przyczyni się do wszechstronnego rozwoju uczniów. Liczne zajęcia z tego zakresu, które zostały przeprowadzone z młodzieżą na różnych etapach edukacyjnych, pokazują, że proponowany sposób uczenia się jest atrakcyjny i efektywny (w konstruktywistycznym sensie) dla uczniów. Uczniowie zazwyczaj nie są przyzwyczajeni do działania w sytuacji, gdy sami mają okazję odkrywać matematykę. Dlatego też często są zaskoczeni, że sami odkryli np. dwukąt na sferze – i że to wcale nie było trudne.

Planowane jest eksperymentalne kompleksowe wdrożenie proponowanej koncepcji w wybranym środowisku szkolnym i badanie efektywności takiego kształcenia.

Literatura

[1] Adamek I.: 1997, *Rozwiązywanie problemów przez dzieci*, Oficyna Wyd.Impuls, Kraków.

[2] Bülent G., Adnan B.: 2010, *Characterizing student mathematics teachers' levels of understanding in spherical geometry*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 41, Issue 8, 23 pp.

[3] Dylak S., *Konstruktywizm jako obiecująca perspektywa kształcenia nauczycieli*, www.cen.uni.wroc.pl/teksty/konstrukcja.pdf

[4] Gray A., Sarhangi R.: 2000, *A Proposal for the Introduction of Non-Euclidean Geometry into the Secondary School Geometry Curriculum*, 17 pp.

[5] Klus-Stańska D.: 2002, *Konstruowanie wiedzy w szkole*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Olsztyn,

[6] Klus-Stańska D.: 2010, *Dydaktyka wobec chaosu pojęć i zdarzeń*, Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa.

[7] Krygowska Z.: 1997, *Zarys dydaktyki matematyki*, tom I, WSiP Warszawa.

[8] Lénárt I.: 1993, *Alternative Models on the Drawing Ball*, Educational Studies in Mathematics, Kluwer, Dordrecht, 24/277-312

[9] Lenart I.: 1996, *Non-Euclidean Adventures on the Lenart Sphere*, Key Curriculum Press, USA,.

[10] Lunenburg F.C.: 1998, *Constructivism and Technology: Instructional Designs for Successful Education Reform* w: Journal of Instructional Psychology, nr 2.

[11] Makara Á., Lénárt I.: 2004, *Comparative geometry on plane and sphere*, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, 2/1, 81–103.

[12] Melton A., Reed B. M., Kasturiarachi A. B.: 2002, *Mathematics that Changes Lives*, Conference Proceedings of the 2nd International Conference of the Teaching of Mathematics, Greece, pp. 10.

[13] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół; załączniki nr 2 i 4.

[14] Rybak A., Lenart I.: 2005, *Czy nauczanie geometrii nieeuklidesowych może być dla uczniów pożyteczne?*, 2nd Dydactic Conference in Żilina with International participation.

[15] Siwek H.: 1998, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa.

[16] Siwek H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

[17] Swoboda E.: 2006, *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się nauczaniu dzieci*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.

[18] Wygotski L.S.:1991, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN Warszawa.

[19] Zionice G. M.: 2002, *O trabalho pedagógico envolvendo geometrias năo∼euclidianas no Ensino Fundamental (Pedagogical works involving non-Euclean geometries in elementary school)*, Universidade Estadual Paulista (Brazil) Zetetike, Vol. 10, No. 17, pp. 43-70.

Anna Rybak pracuje w Instytucie Informatyki Uniwersytetu w Białymstoku
e-mail: aniar@klub.chip.pl
Barbara Dudel pracuje na Wydziale Pedagogiki i Psychologii Uniwersytetu w Białymstoku
e-mail: barbarad14@wp.pl
István Lénárt pracuje w ELTE University, Budapest, Hungary
ilenart@cs.elte.hu

Anna Rybak, Barbara Dudel, István Lénárt

Conception of Including Spherical Geometry into Math Education in Primary School and High School

Summary

The idea of including spherical geometry into math education in Polish educational system is presented in this article. Presented idea is based on theory of constructivism, active method of education and comparative method in simultaneous teaching and learning different geometric systems. A strong correlation with other school subjects (geography, art etc.) is built in presented conception.