Prace monograficzne z dydaktyki matematyki
WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Edyta Nowińska (Poznań)

Aspekty fenomenologiczne i aksjomatyczne działań na liczbach całkowitych

Streszczenie

W artykule przedstawiony zostanie fragment opracowanej przez dydaktyków niemieckich (Cohors-Fresenborg et al., 2011) koncepcji wprowadzenia liczb ujemnych oraz działań na liczbach całkowitych, która łączy podejście fenomenologiczne z ujęciem aksjomatycznym. Podejście fenomenologiczne należy rozumieć jako odnoszenie pojęć matematycznych do pojęć i sytuacji świata realnego i idei, do opisu których dane pojęcia matematyczne są używane (por. Freudenthal 1983, s. ix). Metoda aksjomatyzacji pokazuje natomiast istotny w matematyce sposób myślenia, konstruowania i organizowania teorii matematycznych. Korzystanie z tej metody wymaga specyficznych aktywności matematycznych (w szczególności dowodzenia i dedukcji) oraz sprawnego posługiwania się językiem formalnym. Koncepcja ta została wykorzystana w badaniach w Niemczech i Indonezji. W końcowej części referatu przedstawione zostaną implikacje i spostrzeżenia z tych badań.

Wprowadzenie

Płaszczyzną asymilacji podejścia fenomenologicznego i aksjomatycznego w opisywanej propozycji dydaktycznej jest koncepcja nauczania realistycznego. Zgodnie z nią uczniowie „odkrywają” i wyjaśniają własności liczb całkowitych. W ten sposób systematyzują elementy posiadanej już wiedzy i tworzą spójną, zrozumiałą dla nich teorię. Jest to odpowiednik uporządkowanej aksjomatycznie teorii matematycznej, zgodnie z tendencją dominującą w matematyce XX wieku.

Implementacja do praktyki szkolnej dowodów usytuowanych w aksjomatycznie uporządkowanej teorii matematycznej spotyka się z krytyką. Jest ona uzasadniana głównie obawą o to, że dowodzenie zastąpione zostanie zautomatyzowanymi i bezrefleksyjnie wykonywanymi operacjami i przekształceniami formalnym, przy jednoczesnym zaniedbaniu rozumowania opartego na doświadczeniu uczniów, intuicji matematycznej i „ideach głębokich” pojęć matematycznych (por. Semadeni (2004, s. 4)).

Przeprowadzone badania empiryczne potwierdzają jednak efektywność opisywanej w tym artykule propozycji dydaktycznej wprowadzenia liczb ujemnych, przez co zasługuje ona na szczególną uwagę, ale także wymaga wnikliwego wyjaśnienia. W analizie matematyczno-dydaktycznej tej propozycji wyjaśniona zostanie możliwość rozwoju aktywności matematycznych uczniów, w szczególności tych związanych z posługiwaniem się językiem formalnym, z aksjomatyzacją i dedukcją, poprzez odpowiedni dobór i organizację doświadczenia uczniów, sytuacji ćwiczeniowych i problemowych. Wyjaśniona zostanie także rola metafor jako narzędzia poznawczego w uczeniu się i nauczaniu matematyki.

Jednym z celów dydaktyki matematyki jest zrozumienie szeroko pojętej aktywności matematycznej oraz kształtowanie odpowiednich wyobrażeń uczniów i umiejętności korzystania z nich, tj. kształtowanie postaw intelektualnych stanowiących podstawę myślenia matematycznego.

> An important goal of mathematics education is to understand the thinking involved in doing and learning mathematics (Nunez et al., 1999, s. 45).
>
> As a discipline, mathematics education is concerned not only with creating effective means and methods of instruction, but with understanding why certain methods are effective and others are not, and with larger questions about the nature and development of mathematical knowledge (Nunez et al., 1999, s. 60).

Działania na liczbach wykonywane są przez uczniów już na pierwszym poziomie edukacji i w toku dalszej edukacji przyjmują coraz bardziej złożoną formę. Po wprowadzeniu liczb ujemnych zrozumienie działań na liczbach całkowitych jest dla wielu uczniów trudne. Nie potrafią oni odnieść zapisu formalnego do innych, zrozumiałych dla nich treści i w ten sposób nadać mu sens, tj. wytłumaczyć, dlaczego np. odejmowanie liczby ujemnej możemy zastąpić dodawaniem liczby do niej przeciwnej, czyli liczby dodatniej.

Podejście aksjomatyczne w tym zakresie uchodzi w praktyce szkolnej za trudne, zbyt formalne i wręcz niemożliwe do przyswojenia. W wielu sytuacjach „niemożliwe" wynika z nieumiejętności wsparcia uczniów w procesie konstruowania w ich umyśle odpowiednich obrazów (wyobrażeń) pojęć i metod matematycznych i korzystania z tych obrazów (wyobrażeń). Koncepcja, która zostanie przedstawiona, pokazuje jak można takie wyobrażenia konstruować i jak z nich korzystać, wykorzystując metafory jako mechanizm poznawczy, umożliwiający (semantyczne) zrozumienie jednego pojęcia (np. matematycznego) poprzez odwołanie do innego pojęcia.

> The essence of metaphor is understanding and experiencing one kind of thing in terms of another (Lakoff & Johnson, 1980, s. 5).

Wprawdzie Lakoff i Johnson nie zawężają się w swoich rozważaniach do znaczenia metafor w uczeniu się i nauczaniu matematyki, jednak abstrakcyjny charakter pojęć matematycznych skłania do podkreślenia istotnej roli, jaką metafory odgrywają w edukacji matematycznej.

Przedstawienie koncepcji

Podstawa metodologiczno–teoretyczna

Idea omawianej koncepcji polega na rozbudowywaniu, precyzowaniu i systematyzowaniu elementów wiedzy, z którymi uczniowie są już w jakiś sposób zaznajomieni, do systemu zwanego „microworld".

> Microworlds are the external places where the external actions – caused by the cognitive activities – take place; the effects of these actions give feedback to the mental organizations and the development of mental models. Microworlds serve the function to make such experiences possible, which lead to an adequate mental conceptualization (of mathematical thinking). In case of special goals of learning such as adequate mathematical behavior in a specific mathematical field, specific microworlds have to be developed for usage (Schwank, 1995, s. 104).

Chodzi o pewne zewnętrzne „miejsce" (środowisko dydaktyczne), w którym uczniowie precyzują intuicyjnie dla nich zrozumiałe pojęcia i wypracowują podstawy aktywności umysłowych istotnych dla zrozumienia jakiegoś działu nauczania (np. pewnej teorii matematycznej), jeszcze zanim te intuicyjnie zrozumiałe pojęcia i metody zostaną zmatematyzowane.

> The emphasis of a microworld is, that it is an embodiment of a network of mathematical ideas with the entire possible actions, which are determined by its structure. [...] Microworlds provide the possibilities for experiences. In consequence students can talk about mathematical concepts in an intelligent way because they are speaking from experience (Schwank, 1995, s. 107–108).

Microworld organizuje doświadczenia ucznia tak, aby stały się one podstawą do wyjaśniania i zrozumienia treści matematycznych. Organizacja doświadczenia uczniów sprzyja konstruowaniu w ich umyśle metafor, które pełnią rolę mechanizmu poznawczego, łączącego system pojęć matematycznych z systemem pojęć niematematycznych, traktując ten drugi jako system wyjaśniający.

Warunkiem konstruowania metafor w umyśle ucznia jest konsekwentna organizacja doświadczenia uczniów i precyzowanie ich wspólnie z uczniami, czyli aktywna, oparta na refleksji i kontroli, świadoma postawa uczniów w procesie zdobywania wiedzy matematycznej i meta–matematycznej.

Tę postawę (aktywnego i świadomego udziału ucznia w procesie uczenia się i nauczania) podkreślała Krygowska w rozważaniach nad zagadnieniami dydaktyki matematyki, także w odniesieniu do metody aksjomatycznej w matematyce: „Mówiąc o metodzie aksjomatycznej w nauczaniu, myślimy o trudnym zadaniu dydaktycznym, tj. o przyswojeniu uczniowi pewnego sposobu myślenia przy jego w pełni aktywnym udziale w tym procesie" (Krygowska, 1977, s. 156). Przedstawienie założeń teoretycznych wspomnianej koncepcji i pełna ich egzemplifikacja (metod rozwoju i wspierania aktywnej postawy ucznia wobec zagadnień związanych z opisaną w tym artykule koncepcją) wykraczałoby poza ramy artykułu. Warto jednak podkreślić, że istotnym elementem tej koncepcji są zadania ukierunkowane na pobudzanie aktywnej i świadomej postawy uczniów wobec zagadnień matematycznych poprzez inicjowanie procesów planowania, kontroli i refleksji, które wspierają i regulują proces poznawczy ucznia. Przykłady takich zadań podano w (Kaune et al. 2012a).

Sposób realizacji

Zgodnie z nauczaniem realistycznym, punktem wyjścia w organizowaniu doświadczeń ucznia jest sytuacja realna, tutaj analiza operacji dokonywanych na koncie bankowym oraz sposobu postępowania z pieniędzmi i długami. Określenie „realna" należy rozumieć następująco:

> Of course, by saying the starting points are experientially real, we are not suggesting that the students had to experience these starting points first hand. Instead, we are saying simply that the students should be able to imagine acting in the scenario, as king, for example (Gravemeijer et al., 2003, s. 53).

Sytuacja ta jest rozbudowywana do microworld „Mate Bank", zwanego też „Liczeniem zgodnym z przyjętą umową".

Poprzez analizę, precyzowanie, wykonywanie i kontrolowanie operacji finansowych dokonywanych na koncie bankowym uczniowie uświadamiają sobie charakter tych operacji, opisują i stosują, reguły nimi rządzące, jeszcze zanim doświadczenie to opiszą językiem matematyki. W ten sposób rekonstruują oni wiedzę matematyczną.

Koncepcja nauczania realistycznego pozwala poznać własności pojęć matematycznych (tutaj liczb całkowitych, lub ogólniej – liczb dodatnich i ujemnych) i własności zdefiniowanych dla nich operacji. Ma ona jednak istotne ograniczenia metodologiczne: Dotyczą one rekonstrukcji aktywności prowadzących do aksjomatycznego rozszerzania zbiorów liczbowych, typowego dla matematyki XX wieku. Ponadto trudno też o rekonstrukcję takich elementów wiedzy, które w kontekście realnym nie mają odpowiednika, jak np. mnożenie dwóch liczb ujemnych.

Istotnym doświadczeniem uczniów, pozwalającym pokonać to ograniczenie metodologiczne, jest konstruowanie fikcyjnej umowy z bankiem i zrozumienie zasad korzystania z niej. Umowa ta jest odpowiednikiem układu aksjomatów, jej poszczególne ustalenia odpowiadają aksjomatom, konsekwencje tych ustaleń są natomiast odpowiednikiem twierdzeń możliwych do udowodnienia na gruncie przyjętej teorii. Wykonywanie rachunków bankowych zgodnie z przyjętą umową z bankiem wymaga od ucznia m.in. dedukcji i rozwija umiejętność dowodzenia.

Umowa z bankiem na charakter normatywny. Zawiera ona ustalenia wypracowane przez uczniów poprzez uogólnienie zaobserwowanych własności działań matematycznych, opisujących operacje na rachunku bankowym. Ustalenia tej umowy odnoszą się najpierw do operacji wpłaty i wypłaty. Dopiero poprzez rekonstrukcję zawartej w tej umowie wiedzy matematycznej przyjmuje ona dla uczniów charakter umowy regulującej działania na liczbach.

Zawarcie umowy z fikcyjnym bankiem „Mate Bank" oraz rekonstrukcja zawartej w tej umowie wiedzy matematycznej do postaci układu aksjomatów opisujących działania na liczbach daje możliwość połączenia wyjaśnień opartych na intuicji i doświadczeniu uczniów z formalnymi wyjaśnieniami dowodowymi.

Można zatem powiedzieć, że „reality" w sensie opisanym przez Freudenthala (1991, s.17) (*I prefer to apply the term reality to what common sense experiences as real at a certain stage.*) znajduje w omawianej koncepcji odzwierciedlenie także w zawieraniu umów i korzystaniu z nich. Doświadczenie to stanowi podstawę do zrozumienia przez uczniów metody aksjomatycznej w matematyce i łączy podejście fenomenologiczne z podejściem aksjomatycznym.

Skuteczność przyjętego postępowania osiągana jest m.in. poprzez ciągłe odnoszenie pojęć matematycznych i zapisu formalnego do wcześniej intuicyjnie pojętych, uporządkowanych elementów wiedzy ucznia i jego doświadczenia.

Operacjonalizacja: Microworld „Liczenie zgodnie z przyjęta umową" i związane z nim metafory

Treści zarysowanej powyżej od strony teoretycznej koncepcji dydaktycznej wprowadzenia liczb ujemnych i działań na liczbach całkowitych dotyczą kolejno następujących zagadnień.

1. Wpłata i wypłata pieniędzy na konto lub z konta banku „Mate Bank".
2. Zapis formalny dokonywanych operacji.
3. Konstruowanie umowy z bankiem „Mate Bank" (umowa „Księgowanie wpłat i wypłat").
4. Rekonstrukcja wiedzy matematycznej zawartej w umowie z bankiem (umowa „Działania na liczbach").
5. Liczenie i dowodzenie w oparciu o odpowiednie umowy.
6. Rozszerzenie umowy „Działania na liczbach" (mnożenie i dzielenie liczb).

Punktem wyjścia w kreowaniu wyobrażeń uczniów jest ich intuicyjna wiedza o sposobie postępowania z pieniędzmi na koncie bankowym. Jest ona wykorzystywana w serii zadań, które wymagają zaksięgowania operacji bankowych na kartach do konta pewnego banku, zwanego „Mate Bank".

Od samego początku uczniowie są zachęcani do wyjaśniania operacji dokonywanych w banku, tj. do łączenia ustalonej notacji z treściami dla nich zrozumiałymi. Temu służy część b) poniższego zadania, w której należy napisać opowiadanie pasujące do operacji zanotowanych na karcie bankowej.

Zadanie: W poniższej karcie brakują wpisy.

właściciel konta		*numer konta*
Cichy	Tomasz	01 2222 3223 1111 1111 9999 0001
imię	*nazwisko*	
Poziomkowa 9		
ulica, nr domu		
96-789	Zalesie Wielkie	
kod pocztowy	*miejscowość*	

lp.	data	poprzednie saldo	operacje		nowe saldo
			wypłata	wpłata	
1.	12.10.09	120,00		15,00	135,00
2.	17.10.09	135,00			122,00
3.	28.10.09	122,00	58,00		
4.	31.10.09			7,00	71,00
5.	02.11.09	71,00			81,00

a) Uzupełnij kartę.

b) Ułóż opowiadanie do odnotowanych operacji.

Wprowadzenie pojęć „liczba ujemna” i „liczba dodatnia” odbywa się w procesie refleksji nad rozwiązaniem specjalnie do tego skonstruowanych sytuacji problemowych. Najpierw uczeń jest konfrontowany z sytuacją, której rozwiązanie prowadzi do ustalenia, że bank może udzielić klientowi kredytu.

Zadanie: Poniższa karta pokazuje stan konta Niny:

numer konta:					01 4444 3223 1111 1111 9999 0001
lp.	data	poprzednie saldo	operacje		nowe saldo
			wypłata	wpłata	
11.	14.08.09	127,00		30,00	157,00
12.	18.08.09	157,00	120,00		37,00
13.	21.08.09	37,00		62,00	99,00
14.	28.08.09	99,00	93,00		6,00
15.					

Nina chce zapłacić z jej konta 22 zł za wycieczkę klasową.
Napisz, co w tej sytuacji może zrobić bank.

Wynik takiej operacji powinien być zaksięgowany jako dług, co skłania do modyfikacji karty bankowej. Na kartach pojawiają się dodatkowe oznaczenia dla „winien” (W) i „ma” (M), najpierw tylko w kolumnie „nowe saldo”, potem także dla oznaczenia kwot księgowanych jako wpłaty i wypłaty, ponieważ w następującej sytuacji problemowej uczniowie „odkrywają” konieczność „wpłacania” i „wypłacania” długu: Pewien klient banku „Mate Bank” posiada dwa konta. Dla ułatwienia zarządzania tymi kontami i kontroli nad nimi, zwrócił się on do banku z prośbą o zamknięcie (likwidację) jednego z nich i połączenie sald obu kont na pozostawionym koncie. Stan jednego z kont wynosi M 155, stan drugiego (przeznaczonego do likwidacji) W 135. Jak w tej sytuacji może postąpić bank?

Uczniowie proponują w tej sytuacji dwie możliwości. Pierwsza to przelew odpowiedniej kwoty z pozostawionego konta na konto przeznaczone do likwidacji, tak jak to pokazują poniższe karty do kont.

numer konta										01 5555 3223 1111 1111 9999 0001
lp.	data	poprzednie saldo		operacje				nowe saldo		
	2009	W/M		W/M	wypłata	W/M	wpłata	W/M		
4.	03.12.	M	175,00	M	20,00			M	155,00	
5.	10.12.	M	155,00	***M***	***135,00***			***M***	***20,00***	

numer konta										01 5555 3223 1111 1111 9999 0002
lp.	data	poprzednie saldo		operacje				nowe saldo		
	2009	W/M		W/M	wypłata	W/M	wpłata	W/M		
7.	03.12.	W	180,00			M	45,00	W	135,00	
8.	10.12.	W	135,00			***M***	***135,00***	***M***	***0,00***	

Druga możliwość to przelew z likwidowanego konta na to, które ma pozostać. W tym przypadku z konta przeznaczonego do zamknięcia „wypłacamy" dług i „wpłacamy" go na to konto, które klient pozostawi, czyli przenosimy zadłużenie z jednego konta na drugie.

numer konta										01 5555 3223 1111 1111 9999 0001
lp.	data	poprzednie saldo		operacje				nowe saldo		
	2009	W/M		W/M	wypłata	W/M	wpłata	W/M		
4.	03.12.	M	175,00	M	20,00			M	155,00	
5.	10.12.	M	155,00			***W***	***135,00***	***M***	***20,00***	

numer konta										01 5555 3223 1111 1111 9999 0002
lp.	data	poprzednie saldo		operacje				nowe saldo		
	2009	W/M		W/M	wypłata	W/M	wpłata	W/M		
7.	03.12.	W	180,00			M	45,00	W	135,00	
8.	10.12.	W	135,00	***W***	***135,00***			***M***	***0,00***	

Łatwo zauważyć, że obie operacje prowadzą do tego samego wyniku końcowego na każdym z kont, stanowią jednocześnie uzasadnienie dla faktu, że wypłatę określonej kwoty możemy zastąpić wpłatą kwoty do niej przeciwnej. W języku matematycznym: Mamy sytuację, w której odejmowanie pewnej liczby możemy zastąpić dodawaniem liczby do niej przeciwnej, także w przypadku, gdy odjemnik jest liczba ujemną, co pokazują wypełnione karty. Kursywą z pogrubieniem wpisano odpowiedzi, które w wersji dla ucznia nie są podane i wymagają uzupełnienia.

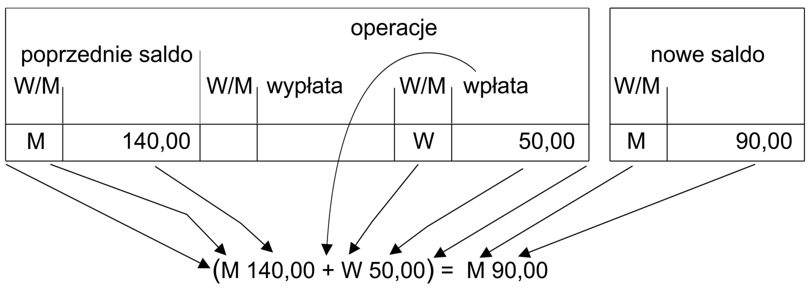
Należy podkreślić, że opisana powyżej sytuacja problemowa zmierza do skonstruowania odpowiednich modeli dodawania i odejmowania liczb ujemnych, do których uczniowie będą mogli odwoływać się w przyszłości, w przypadku wykonywania działań na liczbach całkowitych. Dodawanie liczb ujemnych interpretowane jest tu jako wpłacanie długu na konto (tj. dopisywanie zadłużenia na to konto), odejmowanie natomiast jako wypłacanie długu z konta (np. celem przeniesienia zadłużenia na inne konto).

Odejmowaniu liczby ujemnej można nadać także inną interpretację – odpowiada ono anulowaniu pomyłkowo zaksięgowanej na koncie operacji wpłaty na nie zadłużenia przeniesionego z innego (np. właśnie likwidowanego) konta: Jeżeli na karcie do konta dopisano przez nieuwagę dwukrotnie kwotę W 120 (czyli – 120 zł), to anulowanie błędnej operacji może nastąpić na dwa sposoby: Poprzez dopisanie (wpłacenie) na to konto M 120 (czyli 120 zł) lub „cofnięcie” omyłkowo zaksięgowanej kwoty, tj. wypłatę W 120. W opisie matematycznym drugiego sposobu pojawia się odejmowanie liczby ujemnej, które (w odniesieniu do stanu końcowego konta) skutkuje tym samym, co dodawanie liczby dodatniej w pierwszej sytuacji.

Sytuacja problemowa likwidacji jednego z dwóch kont pozwala wyjaśnić na modelu jeszcze jedną własność liczb całkowitych – przemienność dodawania: Połączone saldo końcowe obu kont nie zależy od tego, które konto będzie zlikwidowane, tj. nie zależy od kolejności, w jakiej wykonywane będą operacje wpłaty: Niezależnie od tego, czy zamknięte zostanie konto o saldzie b i saldo to dopisane do konta o saldzie a, czy też odwrotnie, nowe saldo pozostawionego konta powinno być w obu przypadkach równe.

Rozszerzenie powyższej sytuacji problemowej (poprzez analogię) na przypadek trzech kont, z których jedno ma być pozostawione a dwa zlikwidowane, prowadzi do spostrzeżenia, że saldo końcowe pozostawionego konta nie zależy od kolejności likwidowania wybranych kont i dopisywania ich sald do salda zachowanego konta.

Dążenie do uproszczenia zapisu operacji wpłaty i wypłaty w banku wiąże się z koniecznością zrezygnowania z kart do kont i wprowadzeniem nowej notacji. W zapisie dokonywanych operacji pozostają tylko istotne informacje i w ten sposób przygotowywany jest proces matematyzacji dotychczasowych doświadczeń.



Zamiast dwóch symboli „W” i „M” dla rozróżnienia liczb księgowanych jako „winien” i „ma” wprowadzony zostaje znak minus „–”, który wyróżnia liczby używane dotychczas do księgowania „długu”. Dopiero po wprowadzeniu znaku minus jako znaku liczby ujemnej, wprowadzone zostają pojęcia „liczba dodatnia”/„liczba ujemna” oraz „liczby przeciwne”. Dla podkreślenia związku z dwuargumentową operacją wpłacania/wypłacania pieniędzy, dodawanie i odejmowanie zapisywane są początkowo w nawiasie. Nawias stosowany jest także konsekwentnie w notacji liczb ujemnych.

Przejście do uproszczonej postaci zapisu operacji na koncie nie oznacza rezygnacji z dalszego rozwoju wyobrażeń uczniów związanych z operacjami wykonywanymi w banku – wręcz przeciwnie. Pozbawiony na zewnątrz związku z wpłacaniem i wypłacaniem pieniędzy w banku zapis matematyczny działań na liczbach wiązany jest z wcześniejszym doświadczeniem wpłat i wypłat. Uczniowie zachęcani są do refleksji nad treściami matematycznymi, do kontrolowania i uzasadniania poprawności działań matematycznych, co następuje poprzez ich interpretację w microworld „Mate Bank": Liczby dodatnie interpretowane są jako pieniądze (ulokowane na koncie lub wpłacane na konto/wypłacane z konta), liczby ujemne jako dług (który może opisywać saldo konta oraz przedmiot wpłat i wypłat), liczba zero określa, iż na koncie nie ma jakichkolwiek pieniędzy. Dodawanie interpretowane jest jako wpłata na konto, odejmowanie jako wypłata z konta, a wynik tych operacji jako nowe saldo, czyli nowy stan konta.

Poniższe zadania pokazują, w jaki sposób treści matematyczne mogą być łączone przez uczniów z treściami niematematycznymi. Jedno z zadań wymaga ułożenia odpowiednich równości do opisanych słownie operacji. Drugie zadanie przedstawia sytuację odwrotną – do podanych działań należy dopisać odpowiedni wynik i podać słownie interpretację tego działania. W obu zadaniach wpisano kursywą przykładowe odpowiedzi uczniów.

Zadanie

Ułóż odpowiednie równości do podanych operacji.

Na koncie mam 350 zł i wypłacam z niego 400 zł.	*(350 – 400) = (– 50)*
Na koncie mam 250 zł i przygotowuję konto do zamknięcia.	*(250 – 250) = 0* *lub (250 + (– 250)) = 0*
Na koncie mam dług 250 zł i przygotowuję konto do zamknięcia.	*((– 250) – (– 250)) = 0* *lub ((– 250) + 250) = 0*
Otwieram konto i wpłacam na nie 389 zł.	*(0 + 389) = 389*

Zadanie

Ułóż teksty pasujące do podanych działań. Oblicz nowe saldo.

$((-1000) - (-1000)) = 0$	*Tola ma na koncie dług 1000 zł i (żeby przygotować konto do zamknięcia) wypłaca (przenosi) z tego konta 1000 zł długu. Nowe saldo wynosi 0 zł.*
$(0 + 60) = 60$	*Tola otwiera konto i wpłaca na nie 60 zł. Na koncie ma teraz 60 zł.*
$(1100+(-1600)) = (-500)$	*Tola miała na koncie 1100 zł i na jej konto wpłacono (dopisano/przeniesiono z innego konta) dług 1600 zł. Tola ma teraz na koncie dług 500 zł.*

Powyższe przykłady zadań i wyjaśnienia pokazują organizację wyobrażeń uczniów. W wielu podobnie skonstruowanych zadaniach zauważają i wyjaśniają oni na modelu prawo przemienności i łączności dodawania oraz zależność między odejmowaniem pewnej liczby a dodawaniem liczby do niej przeciwnej, tzn. między wynikiem wypłaty pewnej kwoty pieniędzy z konta a wynikiem wpłaty na to konto kwoty przeciwnej („przeciwieństwem" do „ma" jest „winien" a przeciwieństwem do „winien" jest „ma").

W kolejnym kroku uczniowie uogólniają swoje doświadczenia i wyobrażenia, i układają umowę z bankiem „Mate Bank" po to, by klient banku miał w przyszłości podstawę do sprawdzenia, czy wszystkie operacje dokonane na jego koncie wykonane zostały poprawnie. Potrzeba zawarcia takiej umowy jest dla uczniów oczywista i zrozumiała. Należy zadbać o kształtowanie umiejętności korzystania z tej umowy, tj. kształtowanie wzorców aktywności matematycznych w aksjomatycznie uporządkowanej teorii matematycznej. Od strony dydaktycznej chodzi o stworzenie modelu układu aksjomatów i ćwiczenie umiejętności korzystania z niego, tj. w szczególności umiejętności argumentowania, dowodzenia i dedukcji.

Jakie ustalenia zawiera umowa z bankiem?

1. Otwarcie konta

   Klient banku musi mieć możliwość otwarcia nowego konta. Jeśli otwiera on konto w banku i w pierwszej operacji na tym koncie wpłaca na nie dowolną kwotę pieniędzy lub przenosi na nie dług z innego konta, chce on, aby nowe saldo odpowiadało tej kwocie, która będzie podana do zaksięgowania w pierwszej operacji.

   Ponieważ umowa odnosi się do dowolnej kwoty, powstaje problem zapisu odpowiedniej klauzuli. Doświadczenie pokazuje, że uczniowie sami sugerują w tym przypadku posłużenie się symbolami zamiast konkretnych liczb. Pierwszy punkt umowy z bankiem wygląda następująco: $(0 + a) = a$.

2. Zamknięcie konta
   Klient banku chce mieć możliwość zlikwidowania konta w dowolnym momencie, tj. w szczególności doprowadzenia salda końcowego konta do zera. Jakiej dyspozycji musi on udzielić bankowi? Niezależnie od tego, czy na koncie jest dług czy należności klienta, bank może dopisać do bieżącej kwoty na koncie kwotę do niej przeciwną. W przypadku, gdy saldo opisane jest liczbą ujemną („winien"/dług), klient musi dokonać wpłaty odpowiedniej kwoty. W przypadku, gdy saldo zamykanego konta opisane jest liczbą dodatnią („ma"), bank może dopisać do stanu tego konta dług przeniesiony z innego konta. Drugi punkt umowy wygląda następująco: $(a + (-a)) = 0$.
   Tutaj, w szczególności gdy a jest liczbą ujemną opisującą dług, należy zwrócić uwagę na zapis syntaktyczny liczby przeciwnej do liczby a (np. „$(-(-200)))$" oraz jej znaczenie („przeciwieństwem" do „winien" jest „ma", czyli liczba $(-(-200))$ to inny zapis liczby 200).

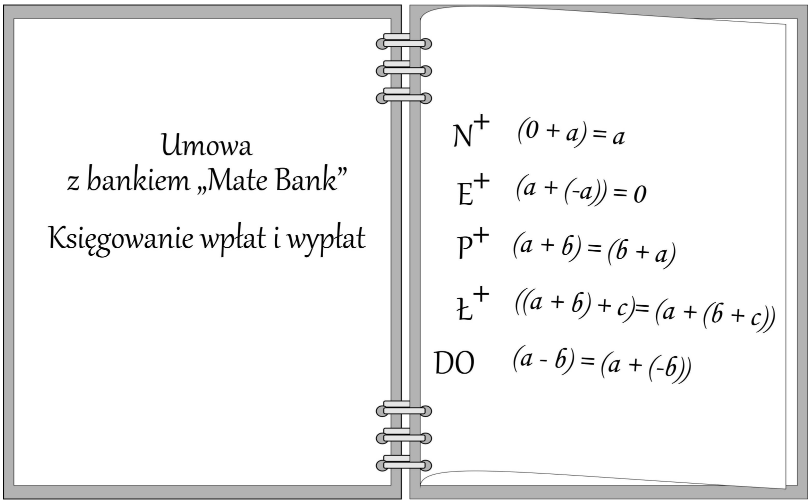
3. Kolejność dwóch operacji
   Klient banku chce, aby saldo jego konta nie zależało od kolejności księgowania wpłat. W szczególności, gdy stan jego konta wynosi a i klient wpłaca kwotę b, to stan jego konta powinien odpowiadać stanowi konta w przypadku, gdyby klient miał na koncie kwotę b i wpłacał na nie kwotę a. Opisuje to trzeci punkt umowy: $(a + b) = (b + a)$.
   Uczniowie mogą interpretować ten zapis także jako likwidację jednego z dwóch kont i lokatę pieniędzy z obu kont na jednym, które pozostawiamy: Niezależnie od tego, czy zlikwidowane zostanie konto o saldzie b i saldo to dopisane do konta o saldzie a, czy też odwrotnie, nowe saldo pozostawionego konta powinno być w każdym z obu przypadków takie samo.

4. Kolejność trzech operacji
   Klient banku oczekuje, że w przypadku likwidacji dwóch z trzech kont i połączenia sald tych trzech kont na jednym z nich, saldo końcowe nie zależy od tego, na którym koncie zgromadzone zostaną łączne środki. Tutaj interpretacja jest analogiczna do interpretacji poprzedniego ustalenia, a ustalenie z bankiem wygląda następująco: $((a+b)+c) = (a+(b+c)))$.

5. Wypłata
   Powyższe ustalenia odnoszą się do przypadku księgowania wpływów na koncie. W sytuacji problemowej uczniowie stają przed pytaniem, czy dla wypłat potrzebna jest nowa umowa z bankiem. Doświadczenie pokazuje, że uczniowie zauważają, że wystarczy poszerzyć aktualną umowę o punkt opisujący sposób księgowania wypłat. Z wcześniejszych zadań wiadomo,

że każda wypłata określonej kwoty może być zaksięgowana jako wpłata kwoty przeciwnej. Opisuje to ostatni punkt umowy: $(a-b) = (a+(-b))$.

Efektem takiego postępowania jest umowa z bankiem. Jej ustalenia są dla uczniów uogólnieniem własności operacji wykonywanych na rachunku bankowym i przyjmują charakter normatywny. Ich nazwy symboliczne pojawiają się dopiero po dyskusji dotyczącej związku zapisanych operacji z działaniami matematycznymi (N+: element neutralny dodawania, E+: element przeciwny/liczby przeciwne, P+: przemienność dodawania, Ł+: łączność dodawania, DO: definicja odejmowania).

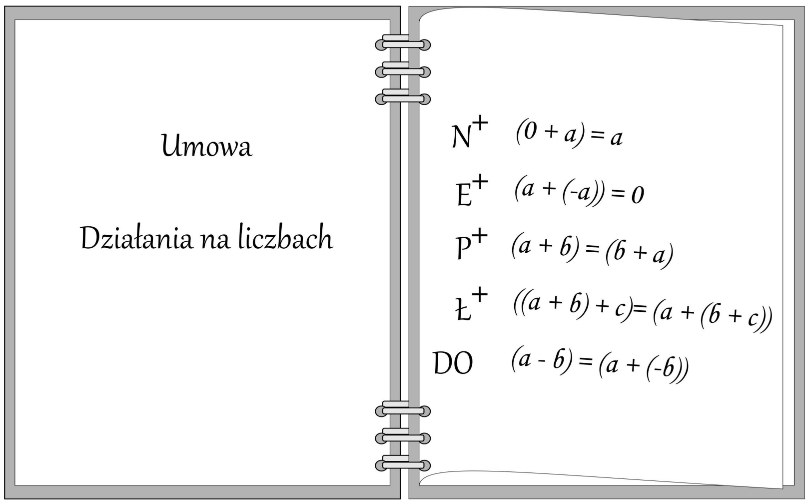


W wyniku abstrakcji i rekonstrukcji wiedzy matematycznej zawartej w tej umowie uczniowie nadają jej nowe znaczenie – dostrzegają w niej umowę opisującą i regulującą działania na liczbach. W tekście dla ucznia ten proces abstrakcji opisany jest następująco:

> Czy zadałeś już sobie pytanie, gdzie znajduje się „Mate Bank”, gdzie ma on siedzibę? „Mate Bank” istnieje w naszej głowie! To my go wymyśliliśmy.
>
> Teraz powinieneś zrozumieć, dlaczego tak postąpiliśmy. Spójrzmy wstecz. Przy dokonywaniu operacji na koncie najpierw wypełnialiśmy karty. Na nich znajdowały się też informacje, które nie dotyczyły operacji na koncie. Z tych informacji zrezygnowaliśmy. W zapisie operacji pozostawiliśmy liczby, znaki działań i nawiasy. Aby móc je zrozumieć, powiedzieliśmy, że są to operacje w banku „Mate Bank”. Skoro zrezygnowaliśmy z kart, musieliśmy zadbać

o to, aby bank działał zgodnie z naszymi oczekiwaniami. W tym celu zawarliśmy z bankiem umowę.

Teraz zrobimy kolejny krok i odsuniemy się od pomysłu „Bank”, wtedy pozostanie tylko „Mate(matyka)”. Nasza umowa opisuje sposób wykonywania działań na liczbach w matematyce (por. Cohors-Fresenborg, Kaune & Griep, 2011, s. 34; Kaune & Cohors-Fresenborg, 2011, s. 34).



Ten proces rekonstrukcji podkreśla znaczenie wcześniejszych doświadczeń uczniów w microworld „Mate Bank” dla rozwoju ich wiedzy i myślenia matematycznego. Odwołując się do nich celem wyjaśnienia lub sprawdzenia poprawności działań na liczbach uczeń uruchamia mechanizm poznawczy metafor, tj. „widzi” w zapisie liczb wpłaty, wypłaty, pieniądze i długi oraz poszczególne ustalenia z bankiem. Zgodnie z ideą nauczania realistycznego, poprzez pryzmat metafor zinterpretowane może być to, co z perspektywy ucznia ma sens, nawet jeśli nie jest to część świata realnego. Dobrym przykładem na to jest wypowiedź pewnego ucznia z Indonezji, który nauczany był według opisanej w tym artykule koncepcji. W niezwiązanej z prowadzonym projektem dydaktycznym pracy kontrolnej, sprawdzającej umiejętność wykonywania działań na liczbach wymiernych, uczeń poprawnie wykonał takie działania: $(123 + (-23)) - 100) =$. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że uczeń ten zinterpretował te działania w kontekście microworld „Mate Bank”, mimo iż w Indonezji kwota 23 rupie nie jest spotykana na co dzień. W tamtejszym systemie monetarnym monety o wartości 1 i 10 rupii nie są spotykane w życiu codziennym (dla porównania warto podać, że butelka małej wody mineralnej kosztuje ok. 10 tys. rupii), a w sklepach kwoty zaokrąglane są z reguły do pełnych setek lub nawet do pełnych tysięcy.

Wypowiedź ucznia wyjaśniająca obliczenia: $(123 + (-23)) - 100) = 0$.

> Ma on 123 rupie, potem wpłaca dług 23 rupie, więc $= (123 + (-23))$. Potem wypłaca 100 rupii. Zatem, po tym jak zapłacił dług, zostało mu jeszcze 100 rupii reszty. Teraz wypłaca 100 rupii. W ten sposób pozostaje mu 0 rupii (por. Kaune et al., 2012b, w druku).

Jak korzystać z umowy?

Korzystanie z umowy wymaga dodatkowych ustaleń dotyczących jej treści i zasad korzystania z niej. Mogą być one spisane w formie załącznika do umowy z bankiem. Dotyczą one następujących aspektów:

- umowny charakter oznaczeń symbolicznych, tj. nazw zmiennych przyjętych w umowie;
- celowość użycia oznaczeń symbolicznych oraz ich interpretacja;
- sposób podstawiania za zmienne konkretnych wartości liczbowych oraz bardziej złożonych wyrażeń algebraicznych.

Korzystanie z umowy nie sprowadza się do podstawiania konkretnych wartości liczbowych za zmienne. Stwarza ono dobrą sytuację dydaktyczną do kształtowania u uczniów umiejętności wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych, np. podstawiania za zmienne złożonych wyrażeń algebraicznych. Opanowanie tej umiejętności stanowi podstawę do korzystania z wyrażeń algebraicznych opisujących prawidłowości lub twierdzenia matematyczne, np. ze wzorów skróconego mnożenia. Dokładne omówienie tych aktywności uczniów wykraczałoby poza ramy tego artykułu. W (Cohors-Fresenborg et al., 2011; Kaune & Cohors-Fresenborg, 2011) można się zapoznać z licznymi przykładami zadań skonstruowanych dla tego celu. Korzystanie z umowy do obliczeń arytmetycznych polega na uzasadnianiu (poprzez podanie odpowiedniego paragrafu umowy) wykonywanych działań. W ten sposób uczniowie wypracowują wzorce postaw intelektualnych stanowiących podstawę dowodzenia metodą dedukcji w aksjomatycznie uporządkowanej teorii matematycznej. Przejście od przykładów konkretnych do ogólnych, zapisanych językiem symbolicznym, nie stanowi dla uczniów istotnej przeszkody w posługiwaniu się umową o działaniach na liczbach, nawet w zakresie dowodzenia, ponieważ poprzez odniesienie zapisu symbolicznego do microworld „Mate Bank” i jego interpretację, uczniowie wypełniają go treściami dla nich zrozumiałymi i nadają mu sens. Ułatwia to posługiwanie się aparatem formalnym i jest to warunek efektywności łączenia aspektów fenomenologicznych z aspektami aksjomatycznymi. Dzięki niemu w omawianej koncepcji nie ma mechanistycznego, bezmyślnego i bezintuicyjnego wykonywania przekształceń na znakach i literach oraz przerostu formy nad treścią.

Poniższy, zaczerpnięty z (Kaune et al., 2012a, w druku) przykład pokazuje, w jaki sposób działania arytmetyczne, przekształcenia algebraiczne i dowodzenie są ze sobą zazębione.

$(((-58)+345)+58)$		$(-(-a)) = (0+(-(-a)))$	N^+
$=((345+(-58))+58)$	K^+	$=((a+(-a))+(-(-a)))$	I^+
$=(345+((-58)+58))$	A^+	$=(a+((-a)+(-(-a))))$	A^+
$=(345+(58+(-58)))$	K^+	$=(a+0)$	I^+
$=(345+0)$	I^+	$=a$	N^+
$=345$	N^+		

Liczenie zgodnie z umową — Dowodzenie zgodnie z umową

Przykłady pochodzą z projektu realizowanego w Indonezji. Wprowadzone tu oznaczenia są skrótem od wyrazów z języka indonezyjskiego (N+: elemen netral penjumlahan, K+: komutatif, A+: asosiatif, I+: invers).

Zadaniem uczniów było w jednym przypadku dokończenie działań i uzasadnienie każdego kroku w obliczeniach, a w drugim przypadku uzasadnienie dokonanych przekształceń algebraicznych. Do każdego obliczenia/przekształcenia uczeń odnotował z boku zastosowany paragraf odpowiedniej umowy. Zadania te inicjują refleksję dotyczącą zastosowania narzędzi matematycznych (tutaj m.in. aksjomatów) i rozwijają umiejętność argumentowania i dowodzenia.

Twierdzenia, które w prosty sposób dają się wyprowadzić jako konsekwencje przyjętej umowy działań na liczbach i jednocześnie zinterpretować jako zapis wpłat i/lub wypłat dokonywanych w Mate Bank, podano poniżej.

T1: (a + 0) = a		**T2: 0 = (−0)**	
(a + 0)		(-0)	
= (0 + a)	P^+	= (0 + (-0))	N^+
= a	N^+	= 0	E^+
T3: (0 - a) = (-a)		**T4: (a - a) = 0**	
(0 - a)		(a - a)	
= (0 + (-a))	DO	= (a + (-a))	DO
= (-a)	E^+	= 0	E^+

Przykłady te pokazują, jak można postępować, aby coraz bardziej formalny i abstrakcyjny charakter matematyki nie stanowił dla uczniów bariery. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że pierwsze dowody przeprowadzane przez uczniów w oparciu o odpowiednią umowę to dowody twierdzeń dla ucznia oczywistych i zrozumiałych, zarówno w modelu z bankiem jak i w ujęciu bardziej abstrakcyjnym, w odniesieniu do działań na liczbach. Jest to zabieg przemyślany i celowy, eksponowany także w rozważań Krygowskiej (1977, s. 157).

> Sensu dowodu matematycznego nie można pokazać uczniom tylko na przykładach dowodów twierdzeń dlań nieoczywistych. Przeciwnie, ten sens staje się jasny, gdy uczeń szuka dowodu twierdzenia dlań zupełnie oczywistego, gdy nie prawdziwość twierdzenia, rozumiana jeszcze bardzo konkretnie (prawdziwość w modelu) i subiektywnie, ale droga logicznie obiektywna i prowadząca od tez już poprzednio uznanych w klasie do danego twierdzenia, staje się przedmiotem jego poszukiwań i rozważań.

Rozszerzenie umowy (*mnożenie i dzielenie liczb wymiernych*)

Skonstruowana dotychczas umowa reguluje tylko dodawanie i odejmowanie liczb. Przyjęte w niej ustalenia obowiązują oczywiście nie tylko dla liczb całkowitych, także dla znanych już uczniom liczb wymiernych. Nasuwa się pytanie, czy można ją poszerzyć na przypadek mnożenia i dzielenia. Od strony dydaktycznej pytanie to sprowadza się do problemu znalezienia odpowiednich interpretacji tych działań. Model umowy z bankiem jest pod tym względem ograniczony, ale związane z nim wyobrażenia oraz aktywności matematyczne uczniów pozwalają rozszerzyć umowę o działaniach na liczbach na przypadek mnożenia i dzielenia, tak, że w efekcie skonstruowana umowa jest modelem układu aksjomatów ciała liczb rzeczywistych. Z realizacją tego pomysłu można się zapoznać w (Cohors-Fresenborg et al., 2011; Kaune & Cohors-Fresenborg, 2011). Możliwość odwołania się do „umowy”, która opisuje własności działań na liczbach rzeczywistych, daje możliwość uzasadnienia, dlaczego iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią. W ten sposób pokonana jest trudność wspomniana przez Freudenthala w rozważaniach o działaniach na liczbach całkowitych.

> It should be perfectly clear that the difficulty of teaching negative numbers resides not in their introduction, nor in problems like $3-7, 7+(-23), (-7)+3, 2*(-5)$, but in $3-(-7), 10-(-7), (-3)\pm(-7), (-2)*(-5)$. If a new teaching method for negative numbers is demonstrated, it is worthwhile to check which kind of problem have been included and which ones have been skipped over (Freudenthal, 1973, s. 281).

O umiejętności udowodnienia (z pozycji nauczyciela), dlaczego wyniku mnożenia dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią, np. $(-2) * (-3) = 6$, Freudenthal pisze.

> The teacher has to know what axiomatics is, even if he never teaches it, and he has to apply this knowledge wherever it is useful (Freudenthal, 1973, s. 231).

Udowodnienie, dlaczego $(-2) * (-3) = 6$ w oparciu o przyjęte własności liczb, tj. wybrany sposób argumentowania, Freudenthal podnosi do rangi problemu *of the highest mathematical importance* (Freudenthal. 1973, s. 231).

Można by przypuszczać, że studenci matematyki, którzy mają za sobą kurs analizy i algebry i z aksjomatami oraz prowadzonymi w oparciu o nie dowodami już nie raz się spotkali, powinni potrafić wyjaśnić naturę problemu określenia znaku iloczynu dwóch liczb ujemnych. Niestety, doświadczenie pokazało, że wielu studentów nie wie, jak podejść do problemu ani jako matematyk, ani jako dydaktyk – przyszły nauczyciel. Wyuczona na pamięć regułka o tym, że „dwa minusy dają plus" zdaje się blokować chęci do dalszego rozważania.

Podsumowanie

Omówiona koncepcja wprowadzenia liczb ujemnych i działań na liczbach całkowitych była przedmiotem implementacji w projektach badawczych w praktyce szkolnej w Niemczech (klasa 5 szkoły podstawowej) i Indonezji (klasa 7 szkoły podstawowej). W badaniach typu *design research* nie potwierdziły się obawy dotyczące przystępności tej propozycji dla uczniów w wieku od 12 do 14 lat, sposobu ich myślenia i możliwość realizacji założonych treści matematycznych w określonym czasie.

Badania potwierdziły hipotezę, że uczniowie, którzy podczas wykonywania działań na liczbach odwołują się do wcześniejszego doświadczenia w *micrworld* i skonstruowanych na jego podstawie wyobrażeń, liczą częściej poprawnie niż uczniowie, którzy takich odniesień nie czynią (por. Kaune et al. 2012b).

Analiza nagrań video ujawniła ponadto takie postawy uczniów, które wskazują na samodzielne, konsekwentne korzystanie z rozwiniętych wyobrażeń dotyczących działań na liczbach i na korzystanie z nich jako pomocnego narzędzia do weryfikacji poprawności wykonanych działań. Przykład takiej postawy analizowany jest w (Kaune & Nowińska, 2011).

Weryfikacja empiryczna efektywności tej koncepcji obala wiele przekonań o tym, co jest w edukacji „niemożliwe". Z analizą przykładów z przeprowadzonych badań można się zapoznać w pracach (Kaune et al., 2012a, 2012b), a z realizacją koncepcji w materiałach dydaktycznych w (Cohors-Fresenborg et al., 2011; Kaune & Cohors-Fresenborg, 2011).

Literatura

[1] Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M.: 2011, *Vertragsgemäßes Rechnen. Arbeitsbuch für Schülerinnen und Schüler in Klasse* 6, Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

[2] Freudenthal, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

[3] Freudenthal, H.: 1983; *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

[4] Freudenthal, H.: 1991; *Revisiting mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[5] Gravemeijer, K., Bowers, J. & Michelle Stephan, M.: 2003; *A Hypothetical Learning Trajectory on Measurement and Flexible Arithmetic*, Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 12, Supporting Students' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in Social Context, Reston: National Council of Teachers of Mathematics, s. 51–66.

[6] Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E.: 2011; *Perjanjian untuk Berhitung. Buku Kerja untuk Siswa Kelas* 7, Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

[7] Kaune, C.; Cohors-Fresenborg, E. & Nowinska, E.: 2012a, *Development of Metacognitive and Discursive Activities in Indonesian Maths Teaching – A theory based design and test of a learning environment*, Palembang: Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education (IndoMS – JME) 3(1), w druku.

[8] Kaune, C.; Cohors-Fresenborg, E.; Nowinska, E.; Handayani, N. & Marpaung, Y.: 2012b; *Development of Metacognitive and Discursive Activities in Indonesian Maths Teaching – Results of the feasibility study*, Palembang: Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education (IndoMS – JME) 3(1), w druku.

[9] Kaune, C. & Nowinska, E.: 2011; *Development of Metacognitive and Discursive Activities in Indonesian Maths Teaching – A theory based analysis of communication processes*, Booklet of the International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education 2011 „Building the Nation Character through Humanistic Mathematics Education", Yogyakarta, 21-23 July 2011, s. 62–71.

[10] Krygowska, Z.: 1977; *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, Warszawa, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

[11] Lakoff, G. & Johnson, M.: 1980; *Metaphors We Live By*, Chicago, University of Chicago Press.

[12] Nunez, R. E., Edwards, L. D., & Matos, J. F.: 1999; *Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education,* Educational Studies in Mathematics, vol. 39, no. 1-3, Netherlands, Springer, s. 45–65.

[13] Schwank, I.: 1995; *The role of microworlds for constructing mathematical concepts* w: M. Behara et al. (Eds.), Symposia Gaussiana, Conference A: Mathematics and Theoretical Physics, Berlin, Walter de Gruyter, s. 101–120.

[14] Semadeni, Z.: 2004; T*he triple nature of mathematics: deep ideas, surface representations, formal models,* Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education (http://www.icme10.dk/proceedings/pages/regular_pdf/RL_Zbigniew_Semadeni.pdf).

Autorka pracuje w Zakładzie Dydaktyki Matematyki,
w Uniwersytecie im. A. Mickiewicza w Poznaniu
nowinska@amu.edu.pl

Phenomenological and axiomatic approach of introduction of integers

Summary

This article presents a learning environment that has been developed in the researcher group from the Institute for Cognitive Mathematics in Osnabrueck (Germany), in order to introduce negative numbers and explain calculations with numbers. This concept uses a phenomenological and axiomatic approach. A phenomenological approach of a mathematical concept means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended (Freudenthal (1983, s. ix)). An axiomatic approach means an important approach used in mathematical thinking to construct and organize mathematical theories. For the use of this approach some specific mathematical activities are necessary (like deduction and an understanding of mathematical proof) and an understanding of formal notations. This learning environment was used in some research projects in Germany and in Indonesia. In the last part of this article some implications and explanatory notes from these research projects will be mentioned.